Martingales et mouvement brownien. QCM 3 : Convergence de martingales discrètes.

March 14, 2019

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale

- ☐ Si pour tout n, $M_n \geq -10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^1 Faux
- ☐ Si pour tout n $M_n \leq 10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s Faux
- ☐ Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s. Correct
- ☐ Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^p pour tout $p \geq 1$. Correct

Solution 1. En effet

1. Non, prenez par exemple M_n la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et le temps d'arret $T = \inf[k : M_k = -10]$. Alors $M_{n\wedge T}$ est une martingale donc surmartingale et elle ici converge vers $M_\infty = -10$ p.s. mais pas $L^1(\forall n$ $\mathbb{E}(M_{k\wedge T}) = M_0)$
2. Non, une sousmartingale converge p.s si est est borné supérieurement et une surmartingale converge si elle est bornée inférieurement. Ici ni l'un ni l'autre et on peut construire le contre exemple suivant. Soit X_n est la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et on pose $M_n = -|X_n|$. Alors $x \to -|x|$ est concave, donc M_n est une surmartingale. Et il est facile de vérifier que M_n ne converge pas (et $M_n \leq 10$ pour tout n).
3. Oui, borné implique borné dans L^1 et donc convergence p.s. puisque M_n est une surmartingale.
4. Oui, borné implique borné dans L^p et donc convergence L^p puisque M_n est une surmartingale.

Exercise 2. Soit f une fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$, $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(2^n \int_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} f(t)dt\right) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

(erreur dans l'énoncé : 2^n à la place de $\frac{1}{2^n}$) alors

- ☐ $f_n \to f$ p.s sur $[0,1]$. Correct
- ☐ $f_n \to f$ dans L^1. Correct
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^1. Correct
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^2. Correct

Solution 2. En effet

1. Oui, avec $\mathcal{F}_n = \sigma(([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}))_{0 \le k \le 2^n-1})$ on a bien $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$. De plus pour tout n, $\mathbb{E}(|f_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|) \le \mathbb{E}(|f|)$. On a donc bien une martingale borné dans L^1 qui converge donc p.s.
2. Oui : voir cours d'aujourd'hui
3. Oui, de même $\mathbb{E}(|f_n|^2) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|^2) \le \mathbb{E}(|f|^2)$. Et donc f_n est une martingale uniformément borné L^2. On a donc $f_n \to f$ dans L^2. Or sur un espace de proba convergence en L^2implique convergence en L^1.
4. Oui, voir ci dessus.

Exercise 3. Soit μ une mesure positive sur $[0,1]$, $\mu([0,1]) = 1$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \mu([\frac{k}{2^k}, \frac{k+1}{2^n}))1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

(erreur dans l'énoncé : 2^n à la place de $\frac{1}{2^n}$)

- ☐ Il existe$f$ tel que $f_n \to f$ p.s sur $[0,1]$. Correct
- ☐ Il existe$f$ tel que $f_n \to f$ dans L^1. Faux
- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en $1/2$, alors $f_n \to 0$ p.s. sur $[0,1]$ Correct
- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en $1/2$, alors f_n est borné dans L^2. Faux

Solution 3. En effet

1. Oui, avec $\mathcal{F}_n = \sigma(([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}))_{0 \le k \le 2^n-1})$ on a bien $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$. De plus pour tout n, $f_n \ge 0$ et $\mathbb{E}(f_n) = 1$. On a donc bien une martingale borné dans L^1 qui converge donc p.s.

2. Non, on a toujours $\mathbb{E}(f_n) = 1$, et on devrait alors avoir $\mathbb{E}(f) = 1$. La question suivante donne un contre exemple.

3. Oui, soit $x \in [0,1]$ avec $x \neq \frac{1}{2}$ alors il existe N tel que $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2^N}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $f_n(x) = 0$. On a donc bien $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]/\{\frac{1}{2}\}$.

4. Non, $f_n(x) = 2^n$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})$ et 0 sinon, donc $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2^n} \times 2^{2n} = 2^n$ qui diverge. Autre preuve: avec la question précédente on a pas la convergence L^1, on ne peut donc pas avoir la convergence L^2. Et donc f_n n'est pas borné dans L^2.

Exercise 4. Soit M_n une martingale à accroissement indépendant avec $M_0 = 0$ et on pose $X_n = \exp(M_n)/\mathbb{E}(\exp(M_n))$.

- ☐ X_n est une martingale Correct
- ☐ X_n converge p.s. Correct
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) \leq \frac{1}{2}$. Correct
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k_1 < k_2 < k_3 : X_{k_1} \geq 2, X_{k_2} \leq 1, X_{k_3} \geq 2) \leq \frac{1}{4}$. Correct

Solution 4. En effet

1. Oui, c'est un exercice vu précédement. $\mathbb{E}(e^{M_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{((M_{n+1}-M_n)+M_n)}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{(M_{n+1}-M_n)})\mathbb{E}(e^{M_n})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{M_{n+1}})\frac{e^{M_n}}{\mathbb{E}(e^{M_n})}$.

2. Oui, une martingale positive converge p.s.

3. Oui, c'est l'inégalité maximal de Doob. On peut refaire la preuve soit T_1 le temps d'arret $T_1 = \inf[k : X_k \geq 2]$ alors $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) = \mathbb{E}(1_{T_1<\infty}) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(1_{T_1<\infty} X_{T_1}) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{n\wedge T_1}) = \frac{1}{2}$

4. Oui, ici il faut introduire également $T_2 = \inf[k > T_1 : X_k \leq 1]$ et $T_3 = \inf[k > T_2 : X_k \geq 2]$. Alors d'après la question précédente $\mathbb{E}(1_{T_2<\infty} X_{T_2}) \leq \mathbb{E}(1_{T_2<\infty}) \leq \mathbb{P}(T_1 < \infty) \leq \frac{1}{2}$. Et donc avec $H_n = 1_{T_2<n\leq T_3}$, $(H \cdot X)$ est une martingale et donc pour tout n,$\mathbb{E}(1_{T_2<\infty}(X_{T_2} + (H \cdot X)_n)) \leq \frac{1}{2}$ et finalement $\mathbb{P}(T_3 < \infty) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(1_{T_3<\infty} X_{T_3}) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(1_{T_2<\infty}(X_{T_2} + (H \cdot X)_n)) \leq \frac{1}{4}$.

Exercise 5. Soit ξ_n des variable aléatoires iid tel que $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma^2$. Soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite de réel tel que $\sum_{i=1}^n |a_i| < \infty$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\xi_k$.

- ☐ $A_n = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ converge dans L^2 Correct
- ☐ $A_n = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ converge p.s. Correct
- ☐ S_n converge p.s Correct
- ☐ S_n converge dans L^1 Correct

Solution 5. En effet

1. Oui, $\sum |a_i| < \infty$ donc $|a_i| \to 0$ et il existe I tel que $|a_i|^2 \leq |a_i|$ pour tout $i \geq I$ et donc $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$. Maintenant $\mathbb{E}(A_n^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2 < \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$. De plus, il est facile de voir que A_n est une martingale qui est donc borné uniformément dans L^2. Elle converge donc dans L^2.

2. Oui, martingale borné uniformément dans L^2 donc converge p.s

3. Oui, même chose $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, S_n est donc une martingale uniformément borné dans L^2 qui converge donc p.s et dans L^2

4. Oui, convergence dans L^2 implique convergence L^1.