Martingales et mouvement brownien. QCM 3 : Convergence de martingales discrètes.

March 7, 2019

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale

- ☐ Si pour tout n, $M_n \geq -10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^1
- ☐ Si pour tout n $M_n \leq 10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s
- ☐ Supposons que (M_n) borné, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s.
- ☐ Supposons que (M_n) borné, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^p pour tout $p \geq 1$.

Exercise 2. Soit f une fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$, $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \Big(\frac{1}{2^n} \int_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} f(t)dt \Big) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

alors

- ☐ $f_n \to f$ p.s sur $[0,1]$.
- ☐ $f_n \to f$ dans L^1.
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^1.
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^2.

Exercise 3. Soit μ une mesure positive sur $[0,1]$, $\mu([0,1]) = 1$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \mu([\frac{k}{2^k}, \frac{k+1}{2^n})) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

- ☐ Il existe$f$ tel que $f_n \to f$ p.s sur $[0,1]$.
- ☐ Il existe$f$ tel que $f_n \to f$ dans L^1.

- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en $1/2$, alors $f_n \to 0$ p.s. sur $[0,1]$
- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en $1/2$, alors f_n est borné dans L^2.

Exercise 4. Soit M_n une martingale à accroissement indépendant avec $M_0 = 0$ et on pose $X_n = \exp(M_n)/\mathbb{E}(\exp(M_n))$.

- ☐ X_n est une martingale
- ☐ X_n converge p.s.
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) \leq \frac{1}{2}$.
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k_1 < k_2 < k_3 : X_{k_1} \geq 2, X_{k_2} \leq 1, X_{k_3} \geq 2) \leq \frac{1}{4}$.

Exercise 5. Soit ξ_n des variable aléatoires iid tel que $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma^2$. Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réel tel que $\sum |a_i| < \infty$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xi_k$.

- ☐ $A_n = \sum a_i \xi_i$ converge dans L^2
- ☐ $A_n = \sum a_i \xi_i$ converge p.s.
- ☐ S_n converge p.s
- ☐ S_n converge dans L^1