

Martingales et mouvement brownien. QCM 2 : Martingales discrètes et temps d'arrêt

March 7, 2019

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercice 1. Soit X_n des variables iid telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, et on pose $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$ la filtration canonique associée à X_n . Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- $A_n = \sum_{k=1}^n 3X_k$ est une martingale. **Correct**
- $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$ est une martingale. **Faux**
- $C_n = \sum_{k=1}^n k^2 X_k - 3n$ est une sousmartingale. **Faux**
- $D_n = (A_n)^4$ est une sousmartingale. **Correct**

Solution 1. En effet

1. Oui, $(3X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables indépendentes de moyenne nulle.
2. Non B_n n'est pas \mathcal{F}_n mesurable
3. Non, $\mathbb{E}(C_{n+1} | \mathcal{F}_n) = C_n - 3 < C_n$ est une surmartingale et non une sousmartingale
4. Oui, puisque A_n est une martingale et $x \rightarrow x^4$ est une fonction convexe.

Exercice 2. Soit \mathcal{F}_n une filtration et G_n un processus adapté.

- $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$ est un temps d'arrêt. **Correct**
- $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$ est un temps d'arrêt. **Correct**
- $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$ est un temps d'arrêt. **Faux**
- $T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$ est un temps d'arrêt. **Correct**

(temps d'arrêt évidemment sous entendu pour \mathcal{F}_n .)

Solution 2. En effet

1. Oui, comme dans le cours $\{T_1 = n\} = \cap_{k < n} \{G_k \leq 1\} \cap \{G_n > 1\}$ est bien \mathcal{F}_n mesurable.
2. Oui, $\{T_2 = n\} = \cup_{l < n} [\{T_1 = l\} \cap \cap_{l < k < n} \{G_k \geq 0\} \cap \{G_n < 0\}]$ est bien \mathcal{F}_n mesurable. En règle général, le temps de la k -ième visite d'un processus adapté est également un temps d'arrêt.
3. Non, voir cours.
4. Oui, T_4 est \mathcal{F}_0 mesurable. Donc en particulier pour tout k , $\{T_4 = k\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_k$.

Exercice 3. Soit \mathcal{F}_n une filtration et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sousmartingale, soit R_n et P_n des processus prédictibles positifs.

- $A_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_k$ est une martingale. **Faux**
- $B_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_{k-1}$ est une martingale. **Correct**
- $C_n = -\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})2R_k$ est une sousmartingale. **Faux**
- $D_n = \sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})(\sum_{i=1}^k P_i)$ est une sousmartingale. **Correct**

Solution 3. En effet

1. Non, M_k n'est pas prévisible.
2. Oui M_{k-1} est prévisible.
3. Non, puisque $-2R_k \leq 0$ finalement C_n est une surmartingale et non une sousmartingale.
4. Oui, $(\sum_{i=1}^k P_i)$ est prévisible positif.

Exercice 4. Soit \mathcal{F}_n une filtration, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale avec $M_0 = 2$ p.s. et T un temps d'arrêt fini p.s.

- $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = 2$ **Correct**
- $\mathbb{E}(M_T) = 2$ **Faux**
- Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$ p.s, alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$ **Correct**
- Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$ alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$ **Faux**

Solution 4. En effet

1. Oui, puisque $M_{n \wedge T}$ est une martingale, on a toujours $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(M_{0 \wedge T}) = \mathbb{E}(M_0) = 2$
2. Non, les hypothèses sont ici insuffisantes. Contre exemple : la marche aléatoire sur \mathbb{N} , $M_0 = 2$ avec le temps d'arrêt $\min(k : M_k = 0)$. Alors $\mathbb{E}(M_T) = 0$.

3. Oui, on a $M_{n \wedge T} \rightarrow M_T$ car T est fini p.s. Donc par théorème de convergence dominé : $2 = \mathbb{E}(M_{n \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(M_T)$ et donc $\mathbb{E}(M_T) = 2$.
4. Non, même exemple qu'au dessus: $\mathbb{E}(|M_{n \wedge T}|) = 2$ mais $\mathbb{E}(M_T) = 0$.

Exercise 5. Soit X_n une suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$ avec $p > 1/2$ et \mathcal{F}_n la filtration canonique pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- $A_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est une martingale **Faux**
- $B_n = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n$ est une martingale **Correct**
- Soit $T = \inf[k \in \mathbb{N}, A_k + 10 = 0]$. Alors $T < \infty$ p.s. **Erreur d'énoncé**
- $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$ **Erreur d'énoncé**

Solution 5. En effet

1. Non, $\mathbb{E}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n X_k + \mathbb{E}(X_{n+1}) = A_n - (2p - 1) < A_n$.
2. Oui, $\mathbb{E}(B_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n + \mathbb{E}(X_{n+1}) + (2p - 1) = B_n$
3. Erreur dans l'énoncé. La question était pour $T_A = \inf[k \in \mathbb{N}, 10 + A_k = 0]$ et non pour $T_B = \inf[k \in \mathbb{N}, B_k = 0]$. Pour T_A , on peut remarquer que $0 \leq \mathbb{E}((10 + A)_{(n+1) \wedge T_A}) \leq \mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T_A}) - \mathbb{P}(T_A > n)(2p - 1)$ et donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(T_A > n) < \infty$.
4. De même on a en fait $\mathbb{E}((2p + 1)(n \wedge T_A)) - \mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T_A}) = 10$ car B est une martingale. De plus $\mathbb{E}((2p + 1)(n \wedge T_A)) \rightarrow (2p + 1)\mathbb{E}(T_A)$ et $\mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T_A}) \rightarrow 0$.