Martingales et mouvement brownien. QCM 2 : Martingales discrètes et temps d'arret

March 17, 2020

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit X_n des variables iid telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, et on pose $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$ la filtration canonique associé à X_n. Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ☐ $A_n = \sum_{k=1}^{n} 3X_k$ est une martingale.
- ☐ $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$ est une martingale.
- ☐ $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 X_k - 3n$ est une sousmartingale.
- ☐ $D_n = (A_n)^4$ est une sousmartingale.

Exercise 2. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration et G_n un processus adapté.

- ☐ $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$ est un temps d'arret.
- ☐ $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$ est un temps d'arret.
- ☐ $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$ est un temps d'arret.
- ☐ $T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$ est un temps d'arret.

(temps d'arret évidement sous entendu pour $\mathcal{F}_n$.)

Exercise 3. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sousmartingale , soit R_n et P_n des processus predictibles positifs.

- ☐ $A_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1}) M_k$ est une martingale.
- ☐ $B_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1}) M_{k-1}$ est une martingale.
- ☐ $C_n = -\sum_{k=1}^{n} (N_k - N_{k-1}) 2R_k$ est une sousmartingale.
- ☐ $D_n = \sum_{k=1}^{n} (N_k - N_{k-1}) (\sum_{i=1}^{k} P_i)$ est une sousmartingale.

Exercise 4. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale avec $M_0 = 2$ p.s. et T un temps d'arret fini p.s.

- ☐ $\mathbb{E}(M_{n\wedge T}) = 2$
- ☐ $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- ☐ Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$ p.s, alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- ☐ Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$ alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$

Exercise 5. Soit X_n une suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$ avec $p > 1/2$ et $\mathcal{F}_n$ la filtration canonique pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- ☐ $A_n = 10 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une martingale
- ☐ $B_n = 10 + \sum_{k=1}^{n} X_k + (2p-1)n$ est une martingale
- ☐ Soit $T = \inf[k \in \mathbb{N},\ A_k = 0]$. Alors $T < \infty$ p.s.
- ☐ $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$