

Martingales et mouvement brownien, feuille d'exercices 6: le mouvement brownien

March 28, 2019

Exercice 1. On pose $B'_t = B_1 - B_{1-t}$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que les deux processus $(B_t)_{t \in [0,1]}$ et $(B'_t)_{t \in [0,1]}$ ont même loi.

Exercice 2. (Non-différentiabilité) A l'aide de loi de tout ou rien, montrer que

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad \text{p.s.} \qquad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{p.s.}$$

En déduire que pour tout $s \geq 0$, la fonction $t \rightarrow B_t$ n'est pas dérivable à droite en s p.s .

Exercice 3. Pour tout réel $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que le processus $(T_a)_{a \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires, au sens où, pour tout $0 \leq a \leq b$ la variable $T_b - T_a$ est indépendante de la tribu $\sigma(T_c, c \geq a)$ et a même loi que T_{b-a} .