# Martingales et mouvement brownien: Feuille d'exercice 3 : Convergence de martingales discrètes

7 mars 2019

**Exercise 1.** (L'urne de Polya) À $n = 0$, une urne contient une boule bleu et une boule rouge. On suit la procédure suivante : à chaque temps $n$ on tire une boule aléatoirement de l'urne puis on la remet en y ajoutant en plus une autre boule de la même couleur. On note $B_n$ et $R_n$ le nombre de boules bleues et de boules rouges respectivement au temps $n$ (Remarquer que l'on a toujours $B_n + R_n = 2 + n$). On définit la filtration canoniquement associé à ce problème $\mathcal{F}_n = \sigma((B_k)_{k \leq n})$

1. Montrer que $\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n + 1$.
2. Montrer que
$$M_n = \frac{B_n}{B_n + R_n}$$
est une martingale (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$).
3. Prouver qu'il existe $M_\infty$ tel que $M_n \to M_\infty$ presque surement. Quelle est la loi de distribution de $M_\infty$?
4. Soit $T = \inf \{n \geq 1 : B_n = 2\}$, montrer que
$$\mathbb{E}(\frac{1}{T+2}) = \frac{1}{4}$$

**Exercise 2.** (Processus de Branchement) Soit $(\xi_{n,k})_{,n,k \geq 1}$ des variables aléatoires entières iid tel que $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = m$. Soit $X_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, on définit récursivement
$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,k}.$$
La filtration associée est $\mathcal{F}_n = \sigma((\xi_{i,k})_{i \leq n, k \in \mathbb{N}})$

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = m^n$ pour tout $n$.
2. Montrer que $Z_n = m^{-n} X_n$ est une martingale.

3. Prouver qu'il existe $Z_\infty$ tel que $Z_n \to Z_\infty$ presque surement.
4. Montrer que si $m \leq 1$ alors $Z_\infty = 0$ p.s
5. On suppose $m > 1$ et $\mathbb{E}(|\xi_{1,1}|^2) < \infty$. Calculer $\mathbb{E}(Z_n^2|\mathcal{F}_{n-1})$ et montrer que
$$\sup_n \mathbb{E}(Z_n^2) < \infty.$$
6. Conclure que
$$\mathbb{P}(Z_\infty > 0) > 0.$$