Martingales et mouvement brownien: Feuille d'exercice 2 : Martingales discrètes

28 février 2019

Exercise 1. Soit $(X_n)_{1\leq n}$ un processus à accroissement indépendant (ie $\forall n$,$(X_{n+1}-X_n)$ est indépendent de $\sigma((X_k)_{k\leq n})$). Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $X_n \in L^1$ pour tout $n \geq 0$, $\tilde{X}_n = X_n - \mathbb{E}(X_n)$ est une martingale.
2. $X_n \in L^2$ pour tout $n \geq 0$ alors $Y_n = \tilde{X}_n^2 - \mathbb{E}(\tilde{X}_n^2)$ est une martingale.
3. Si il existe θ tel que pour tout n, $\mathbb{E}(\exp(\theta X_n)) < \infty$, alors
$$\tilde{X}_n = \frac{e^{\theta X_n}}{\mathbb{E}(e^{\theta X_n})}$$
est une martingale.

Exercise 2. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, (X_n) une martingale et τ un temps d'arret avec $\tau < \infty$ p.s. Supposons qu'il existe $Y \in L^1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$ et n tel que $n \leq \tau(\omega)$, $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$$

Exercise 3. Soit $(\xi_n)_{1\leq n}$ des variable de Bernoulli indépendante de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On pose

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

avec S_0 une variable aléatoire à valeure entière entre a et b où $a < b$ sont des entiers. On pose enfin $T_a = \inf(k \in \mathbb{N}, S_k = a\ )$, $T_b = \inf(k \in \mathbb{N}, S_k = b)$ et $T = T_a \wedge T_b$.

1. Montrer que $T < \infty$ p.s.,
2. Calculer
$$\mathbb{P}(T = T_a)$$