Martingales et mouvement brownien: Feuille d'exercice 1 : Probabilités conditionnelles

March 5, 2020

Exercise 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Montrez que si $X' \leq X$ (deux variable aléatoire $\mathcal{F}$ mesurable) alors

$$\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$$

$\mu-$presque surement

Exercise 2. Soit ξ tel que $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(\xi) = 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2|\mathcal{B})) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2)$$

Exercise 3. Soit ξ_i des variable iid tel que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ et soit $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Montrez les affirmations suivantes:

1. $\mathbb{E}(\xi_k|S_n) = \frac{S_n}{n}$ p.s pour tout $k \leq n$.
2. $\mathbb{E}(\xi_1|S_m, m \geq n) = \frac{S_n}{n}$ p.s.
3. Si ξ_1 est à valeur dans $\mathbb{N}$ alors on a la formule suivante:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\mathbb{P}(S_n = k)} \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(\xi_1 = i)\mathbb{P}(S_{n-1} = k - i)$$

Exercise 4. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$. Et soit $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. On définit la suite suivante iterativement

$$f_{2n+1} = \mathbb{E}(f_{2n}|\mathcal{B}_1)$$

et

$$f_{2n+2} = \mathbb{E}(f_{2n+1}|\mathcal{B}_2)$$

1. La suite est elle constante à partir d'un certain rang?
2. Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont fini, la suite converge t elle? Si oui caractériser sa limite.
3. Même question dans le cas si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux sous tribus quelconque?