Devoir maison : Martingales et mouvement brownien.

30 mars 2020

Problème 1. Soit $\Lambda = [0, A] \times [0, B] \cap \mathbb{Z}^2$ avec $A, B \in \mathbb{N}$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur Λ, c'est à dire la chaine de Markov telle que pour tout $x, y \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{si } |x - y| > 1 \\ \frac{1}{4} (\text{resp } \frac{1}{2}) & \text{si } x = y \text{ et que } x \text{ est sur le bord (resp le coin) de } \Lambda \end{cases}$$

Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \in \{0\} \times [0, B]\}$, $T_A = \inf\{n : X_n \in \{A\} \times [0, B]\}$, $S_0 = \inf\{n : X_n \in [0, A] \times \{0\}\}$, $S_B = \inf\{n : X_n \in [0, A] \times \{B\}\}$. On notera $\mathcal{F}_n$ la tribu canoniquement associée à (X_n).

1. Montrer que T_0 ,T_A et $T_0 \wedge T_A = \min\{T_0, T_A\}$ sont des temps d'arret.
2. On note $\Lambda^\circ = [1, A - 1] \times [1, B - 1] \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Montrer que la fonction $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ donné par $f(x, y) := x$ est harmonique sur Λ°. Donner deux autres exemples de fonctions harmonique sur Λ° linéairement indépendantes de f.
3. A partir de la question précédente, de X_n et des temps d'arrets T_0, T_A, S_0, S_B construire deux martingales sur Λ que l'on notera M_n et N_n.
4. Montrer que $T_0 \wedge T_A < \infty$ p.s. (Dans la suite on admettra aussi que $S_0 \wedge S_B < \infty$ p.s)
5. Supposons $X_0 = (x_0, y_0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_0 < T_A)$ et $\mathbb{P}(S_0 < S_B)$.
6. On note $\partial\Lambda = (\{0, A\} \times [0, B]) \cup ([0, A] \times \{0, B\}) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Soit $u : \partial\Lambda \to \mathbb{R}$, on cherche $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tel que h est harmonique sur Λ° et $h|_{\partial\Lambda} = u$. Proposer une formule permettant de construire h. Cette solution est-elle unique ? En déduire que $\|h\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$.
7. Dans cette question on suppose $A = B \in 2\mathbb{N}$, et

$$u(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x = A \\ 5 & \text{si } y = 0 \text{ et } x \notin \{0, A\} \\ 0 & \text{si } y = A \text{ et } x \notin \{0, A\} \end{cases}$$

   Soit h comme dans la question précédente. Calculer $h(A/2, A/2)$.

Problème 2. Michel joue de l'argent avec un dé. On note les lancés de dés $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui sont des variables aléatoires iid uniformes sur $\{1,\cdots,6\}$ (les lancés de dés sont équilibrés et indépendants.). Michel commence avec comme argent A_0 et on note $A_n \in \mathbb{N}$ la quantité d'argent au temps n. Avant chaque lancé D_n, Michel mise une somme $1 \leq S_n \leq A_n$ à chaque tour il gagne 5 fois sa mise si $D_n = 6$ et perd sa mise sinon :

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n + 5S_n & \text{si } D_n = 6 \\ A_n - S_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle stratégie une suite de fonction $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $c_n : \{1,\cdots,6\}^n \to \mathbb{N}$. On dira que Michel suit la stratégie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n il choisit de miser la somme $S_n = c_n(D_0,\cdots,D_{n-1})$. On note $T = \inf\{n : A_n = 0\}$.

1. Montrer que quelque soit la stratégie choisie, A_n est une martingale. En déduire $\mathbb{E}(A_n)$.
2. Montrer que quelque soit la stratégie, Michel termine ruiné p.s.
3. A t on $A_n \to 0$ dans L^1 ?
4. Ici on supposera que $S_n = 1$ pour tout n. Montrer que pour tout n $(6n + A_0)\mathbb{P}(T > n) \geq A_0$. En déduire que $\mathbb{E}(T) = \infty$.
5. Dans la suite on supposera que le dé n'est plus equilibré et que $\mathbb{P}(D_i = 6) = q < \frac{1}{6}$. Montrer que $A_n + \sum_{i=0}^{n-1}(1-6q)S_i$ est une martingale.
6. Avec $S_n = 1$ pour tout n, on admettra que $A_n \to 0$ p.s et dans L^1. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
7. On supposera maintenant que $\mathbb{P}(D_i = 6) = p > \frac{1}{6}$ et toujours $S_n = 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe $0 < \gamma < 1$ tel que $N_n := \gamma^{A_n}$ est une martingale.
8. En déduire que $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$, si possible donner $\mathbb{P}(T = \infty)$ en fonction de γ.