Martingale et mouvement brownien

20 mars 2020

Version très préliminaire. N'hésitez à me signaler les passages qui ne vous paraissent pas clairs.

Table des matières

Première partie

Martingales discrètes

1 Rappels sur l'espérance conditionnel

1.1 Introduction sur un exemple.

Soit $0 < t_1 < t_2 < t_{n-1} < 1$ et on considère f une fonction constante par morceaux sur les segments $[t_i, t_{i+1})$ (où on notera $t_0 = 0$ et $t_n = 1$). Soit $\{s_1, \cdots, s_{l-1}\} \subset \{t_1, \cdots, t_{n-1}\}$, on souhaiterai approximer f par une fonction g constante par morceaux sur les segments $[s_i, s_{i+1})$. On peut penser à un signal où f est un sequençage à haute précision et que l'on veut se restreindre à un signal plus grossier mais conservant à peu près les caractéristiques de f. On a plusieur approche possible :

La première possibilité est de directement prendre la moyenne de f sur chacun des segments $[s_i, s_{i+1})$

$$g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$$

où $b_i = \frac{1}{|s_{i+1} - s_i|} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du$.

Une deuxième approache plus formelle est de minimiser $\|f - g\|$ pour une certaine norme. La plus facile est de considérer la norme $\|.\|_{L^2}$:

$$\|f - g\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(u) - g(u)|^2 du$$

car c'est un espace de Hilbert. il se trouve que pour ce choix ci la solution obtenue est la même que précédemment. En effet on on peut vérifier en écrivant aussi $g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$, le minimum est atteind lorsque

$$0 = \frac{d}{db_i} \|f - g\|_{L^2}^2 = 2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u) - b_i du$$

et donc $(s_{i+1} - s_i) b_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du$.

Une troisième approache est d'aspect un peu pratique. Plutôt que voir f comme une fonction on peut la voir plutôt comme une forme linéaire (une distribution) sur un ensemble des fonction

$$\langle f, h \rangle = \int_0^1 f(u)h(u)du$$

On peut penser que si f est un signal, les $\langle f, h \rangle$ sont les informations que l'on souhaite extraire du signal. Si les h considérés sont tous grossiers : constante par morceaux sur les segments $[s_i, s_{i+1})$, il est inutile de conserver tout le sequençage de haute précision. On introduira plutôt g également constante par morceau $[s_i, s_{i+1})$ qui agit de la même manière que f :

$$\langle g, h \rangle = \langle f, h \rangle$$

pour tout h. Cette troisième définition de g donne encore la même fonction que précédemment. En effet on peut vérifier pour $h = 1_{[s_i, s_{i+1})}$

$$\langle g, h\rangle = \int_{s_i}^{s_{i+1}} b_i du = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du = \langle f, h\rangle$$

Cet exemple illustre les différentes points de vu de considérer l'espérance conditionnelle que nous voyons maintenant.

1.2 Espérance conditionnel

1.2.1 Quelques rappel sur les espaces mesurables.

Soit Ω un ensemble. $\mathcal{F}$ est une tribue sur Ω si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{F}$ stable par unions, intersections dénombrable et complémentaire (σ-algèbre).

Exemple 1.1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu fini de Ω alors il existe une partition $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ des “atomes” de la tribu tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $I \subset \{1, \ldots, k\}$

$$B = \cup_{i \in I} A_i.$$

Définition 1.2. Soit deux tribu $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur Ω, on dit que$\mathcal{F}$ est plus fine que $\mathcal{G}$ et reciproquement que $\mathcal{G}$ est plus grossière que $\mathcal{F}$ ssi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. On dit aussi que $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3. Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurable. Une fonction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est dite mesurable si pour tout $A \in \mathcal{F}_2$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$. Remarque si $\mathcal{F}_1'$ est plus fine que $\mathcal{F}_1$, respectivement $\mathcal{F}_2'$ plus grossière que $\mathcal{F}_2$ alors f est également mesurable pour $(\Omega_1, \mathcal{F}_1'), (\Omega_2, \mathcal{F}_2')$.

On supposera toujours que $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne. Dans ce cas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable ssi $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.4. Pour $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ un espaces mesurable, une fonction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ génère une tribu sur Ω_1 via $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_2\}$.

Remarque 1.5. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$ mesurable est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors les fonctions $\mathcal{G}$ mesurables forment un sous espace vectoriel.

Proposition 1.6. *L'ensemble de fonctions $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(XY)$.*

1.2.2 Définitions de l'espérance conditionnel.

Définition 1.7. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous tribu

1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu fini, on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \sum_{A \text{ atomes de } \Omega} 1_A . b_A, \quad b_A := \begin{cases} \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{E}(1_A X) & \text{si } \mu(A) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}(X)$$

où $\pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}$ est la projection orthogonal (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$) sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.
3. On définit $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ comme l'unique fonction de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ tel que

$$\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour toute fonction Z $\mathcal{G}$-mesurable bornée. Ou de manière equivalente comme l'unique fonction de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ tel que
4.

$$\mathbb{E}(1_A X) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour tout $A \in \mathcal{G}$.

La première définition est très intuitive : une espérance conditionnelle consiste simplement à moyenner la fonction sur des petits sous espaces. On peut conjecturer que les propriétés que l'on connait sur la moyenne se généralisent à l'espérance conditionnelle.

La deuxième définition donne un autre point de vu aussi très intéressant : l'espérance conditionnelle est une application linéaire, mieux une projection ! Ceci nous permet aussi de deviner certaine de ces propriétés.

La troisième définition est plus formelle et moins transparante. Cependant c'est la plus générale et c'est donc elle que l'on doit utiliser pour les démonstrations.

Montrons que ces trois définitions sont bien équivalentes (sur leur domaine de définition).

Démonstration. 1⇔2 : Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{B}$ une tribu fini. La variable $\pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}(X) =: \pi(X)$ est la fonction $\mathcal{B}$ mesurable qui minimise $\|X - Y\|_{L^2}^2$ sur toutes les fonctions $\mathcal{B}$ mesurable $Y = \sum_{A \text{ atome de } \Omega} 1_A b_A$. On a donc $\pi(X) =$ et En dérivant

$$\frac{d}{db_A}\|X - Y\|_{L^2}^2 = \frac{d}{db_A} \sum_{A' \text{ atome de } \Omega} \int_{A'} (X - b_{A'})^2 d\mu = 2\int_A (X - b)d\mu = 0$$

et donc $b_A\mu(A) = \int_A X d\mu = \mathbb{E}(1_A X)$.

3⇔2 Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on a $X = \pi(X) + (X - \pi(X))$ où par définition de la projection orthogonal $(X - \pi(X)) \perp L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Soit Z $\mathcal{B}$ mesurable borné. Alors $\mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = 0$ et on a

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\pi(X)Z) + \mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = \mathbb{E}(\pi(X)Z)$$

ce qui redonne bien la définition 2. Le sens 3⇒2 se déduit alors de l'unicité. □

Exercice 1.8. En utilisant les trois définitions, montrer que pour $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ la tribu grossière pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on a

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)1_\Omega$$

(la fonction constante égale $\mathbb{E}(X)$).

Solution 1.9. C'est immédiat en utilisant la première définition : $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mathbb{E}(X1_\Omega)1_\Omega = \mathbb{E}(X)1_\Omega$ puisque $\mu(\Omega) = 1$. Pour la deuxième puisque $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$ mesurable, $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$. On cherche b qui minimise $\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2)$. Il suffit de dériver : $\frac{d}{db}\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2) = 2\mathbb{E}(X - b1_\Omega) = 0$ soit $\mathbb{E}(X) = b\mathbb{E}(1_\Omega) = b$. Enfin pour la troisième définition. On a encore $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(b1_\Omega) = b$ car $\Omega \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que la troisième définition est valide : que l'on a bien existence et unicité.

Démonstration. Unicité : Soit Y_1 et Y_2 deux fonction $\mathcal{B}$ mesurable qui satisfont la définition 3. On pose $A_+ := \{Y_1 > Y_2\}$ et $A_- := \{Y_2 > Y_1\}$, puisque Y_1 et Y_2 sont $\mathcal{B}$ mesurable, $A_+, A_- \in \mathcal{B}$. Alors

$$\mathbb{E}(1_{A_+}(Y_1 - Y_2)) = \mathbb{E}(1_{A_+}Y_1) - \mathbb{E}(1_{A_+}Y_2)) = \mathbb{E}(1_{A_+}X)) - \mathbb{E}(1_{A_+}X)) = 0.$$

Mais de plus par construction $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) \geq 0$. Conclusion $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) = 0$ p.s et donc $1_{A_+} = 0$ p.s. On réalise le même raisonnement pour A_- et on obtient $1_{A_-} = 0$ p.s. Pour $\{Y_1 \neq Y_2\} = A_+ \cup A_-$ est bien de mesure nulle. $\square$

Pour l'existence on va d'abord montrer la proposition suivante

Proposition 1.10. *Soit $X, X' \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Si $X \leq X'$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s.*

Ceci semble évident lorsque l'on pense à la définition utilisant la moyenne avec $\mathcal{B}$ fini. Donc montrons la dans le cas général.

Démonstration. On pose $A_+ = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) > \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})\}$. Puisque $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}), \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable, $A_+ \in \mathcal{B}$. Donc

$$0 \leq \mathbb{E}((X' - X)1_{A_+}) = \mathbb{E}((\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+})$$

mais puisque $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} \leq 0$, on a alors $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} = 0$ p.s soit $1_{A_+} = 0$ p.s. et donc $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s. $\square$

On montre maintenant l'existence pour la définition 3.

Démonstration. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ positif, considérons la suite de variables aléatoires $X \wedge n$. On a alors $X \wedge n \to X$ monotone croissant et $X \wedge n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour tout n. $\pi(X \wedge n)$ est donc bien définit et par la proposition 1.10, $\pi(X \wedge n)$ est monontone croissant. Il exisite donc Y_∞ tel que $\pi(X \wedge n) \to Y_\infty$.

Tout d'abord pour tout n, $\pi(X \wedge n)$ est $\mathcal{B}$ mesurable donc Y_∞ est $\mathcal{B}$ mesurable comme limite de fonction $\mathcal{B}$ mesurable. Soit $A \in \mathcal{B}$. Alors pour tout n

$$\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) = \mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n))$$

par convergence monotone on a $\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) \to \mathbb{E}(1_A X)$ et $\mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n)) \to \mathbb{E}(1_A Y_\infty)$. Conclusion pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(1_A Y_\infty) = \mathbb{E}(1_A X)$, et on peut donc poser $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = Y_\infty$. □

1.3 Quelques propriétés de l'espérance conditionnelle.

L'espérance conditionnelle est la notion de base pour les martingales. Ici on présente quelques propriétés qui nous seront très utiles dans la suite.

Proposition 1.11. *Si X est $\mathcal{B}$ mesurable, alors* $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$

1. $X \to \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ *est une application linéaire.*
2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$
3. *Si* $X \geq 0$, *alors* $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$ *p.s*
4. $|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{B})$ *p.s*

Démonstration. Preuve : Trivialement X est $\mathcal{B}$ mesurable est pour tout Z $\mathcal{B}$ mesurable $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(XZ)$ X satisfait donc bien les conditions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

Soit $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{B})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$ est bien $\mathcal{B}$ mesurable car $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable. De plus pour tout Z $\mathcal{B}$ mesurable on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Z) &= \lambda\mathbb{E}(X_1 Z) + \mu\mathbb{E}(X_2 Z) \\ &= \lambda\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|\mathcal{B})Z) + \mu\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})Z) \\ &= \mathbb{E}(Z(\lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B}))) \end{aligned}$$

Donc par unicité $\mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)|\mathcal{B}) = \lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$.

Ω est évidemment $\mathcal{B}$ mesurable donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$.

C'est un cas particulier de la proposition 1.10 avec $X' = 0$.

On écrit $X = X_+ - X_-$ où $X_+ = 1_{X \geq 0} X$ et $X_- = -1_{X<0} X$. $|X| = X_+ + X_-$ et $\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B})$, $\mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})$ sont positif p.s. On a alors

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| = |\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(|X_+||\mathcal{B})$$

□

Proposition 1.12. *Si Y est $\mathcal{B}$ mesurable et $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$$

Démonstration. $Y, \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable donc $Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ aussi. Soit Z, $\mathcal{B}$ mesurable, alors

$$\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})YZ)$$

car YZ est $\mathcal{B}$ mesurable. Par unicité on a donc $\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$. □

Proposition 1.13. *(Concatenation)*
Si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$.

Démonstration. $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ est bien $\mathcal{B}_1$ mesurable. Soit Z $\mathcal{B}_1$ mesurable,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)Z) = \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)Z)$$

on peut alors conclure par unicité. □

Proposition 1.14. *:Jensen*
Soit $X \in L^1$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex alors

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

Démonstration. On utilise le fait qu'une fonction convexe peut s'exprimer comme le maximum de fonction affines. On pose

$$E_f = \{(a,b) \in \mathbb{Q} : \forall t : f(t) \geq at + b\}$$

et alors

$$f(x) = \sup_{(a,b)\in E_f} ax + b.$$

En effet pour tout $(a,b) \in E_f$ $ax + b \leq f(x)$ et le cas d'égalité est atteind lors de la tangeante à f au point x. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) &= \mathbb{E}(\sup_{(a,b)\in E_f} aX + b|\mathcal{B}) \\ &\geq \sup_{(a,b)\in E_f} a\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b \\ &= f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.15. *Convergence :*

1. Si X_n monotone croissant converge vers X alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$ est monotone croissant et converge vers $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.
2. Si X_n est une suite positive alors $\liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{B})$
3. Si $|X_n| \leq Y$ avec $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $X_n \to X$ p.s alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

1.3.1 Independance

Définition 1.16. Deux tribus $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont indépendantes si pour tout $A_1 \in \mathcal{B}_1$, $A_2 \in \mathcal{B}_2$ on a $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$ (ou $\mathbb{E}(1_{A_1}1_{A_2}) = \mathbb{E}(1_{A_1})\mathbb{E}(1_{A_2})$). (def equivalente : pour tout $Z_1\mathcal{B}_1$ mesurable et Z_2 $\mathcal{B}_2$ mesurable on $\mathbb{E}(Z_1Z_2) = \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$.

Remarquer que si X_1 est $\mathcal{B}_1$ mesurable et X_2 est $\mathcal{B}_2$ mesurable alors X_1, X_2 sont indépendantes.

Proposition 1.17. *Soit $X \in L^1(\Omega, \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \mu)$ si X est $\mathcal{B}_1$ mesurable alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s*

Démonstration. Soit Z $\mathcal{B}_2$ mesurable alors $\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X))$. □

[séance d'exercices.]
[corrections exercices.]

2 Les Martingales discrètes

2.1 Definition de martingales/surmartingales/sousmartingales

Définition 2.1. On appelle une filtration une chaine emboité de tribu : $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots$.

Définition 2.2. On dit qu'un processus X_n est adapté si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

Exemple 2.3. On peut penser aux exemples suivants

1. $\mathcal{F}_n = \{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), 0 \leq k \leq 2^n\}$ est une filtration
2. Les pavages emboités forment une filtration.
3. Soit X_i des variables aléatoires et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ est une filtration.
4. De manière trivial X_n est adapté pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.
5. Dans ce cas $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est aussi adapté pour $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$

Définition 2.4. (Martingale) Soit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_n \subset \cdots$ une filtration. On dit que M_n est une martingale si c'est un processus adapté, pour tout n, $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ et que pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) = M_m$$

que c'est une sous martigale si pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \geq M_m$$

et surmartingale si pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \leq M_m.$$

Exemple 2.5. Soit X_i des variable iid avec $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$. Alors $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est -une martingale ssi $\mathbb{E}(X) = 0$, une sousmartingale si$\mathbb{E}(X) \geq 0$ une surmartingale si $\mathbb{E}(X) \leq 0$.

Une martingale fermé : soit $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_\infty$ et soit X $\mathcal{F}_\infty$ mesurable, $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Alors $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ est une martingale.

Remarque 2.6. Si M_n est une (sous/sur-)martingale et X $\mathcal{F}_0$ mesurable alors $M_n + X$ est une (sous/sur-)martingale.

Exemple : Les moyennes sur les sous segments.

Utilisation de Jensen :

Proposition 2.7. *Si M_n est une martingale et f une fonction convexe. alors $f(M_n)$ est une sous martingale*

Si M_n est sous-martingale et f une fonction convexe et croissante alors $f(M_n)$ est une sous martingale

Exemple :

Exemple 2.8. Le carré d'une martingale est une sous martingale, la valeur absolue d'une martingale est une sous martingale, l'exponentiel d'une sous-martingale est une sous-martingale.

2.2 Lemme martingale et les temps d'arrets

Lemme 2.9. *(Fondammental)Si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable (un processus prévisible), borné. Soit M_n un processus adapté. On définit*

$$(H \cdot M)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1})$$

Alors si M_n est une martingale alors $(H \cdot M)$ est une martingale

Si M_n est une sous martingale et $H \geq 0$ alors $(H \cdot M)$ est une sous martingale.

Démonstration. Dans le cas d'une martigale on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(H_n(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= (H \cdot M)_{n-1} + H_n\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= (H \cdot M)_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une sousmartingale et avec $H \geq 0$, il suffit de remplacer la dernière égalité par $\geq (H \cdot M)_{n-1}$. □

Le Lemme précédent est assez extraordinaire : a partir d'une martingale : on peut contruire un très grand nombre d'autre martingale. Dans énormement de cas pour résoudre un problème avec des Martingale, il suffit de considérer le bon processus prévisible H et d'utiliser le lemme.

Il a aussi une interprétation très naturelle. Supposer que vous jouiez à un jeu de hasard (pile ou face, roulette, dès,$\cdots$) et qu'à chaque tour vous misiez une certaine quantité d'argent. Supposons en plus que les règles du jeu soit équilibré et que Alors quelque soit votre statégie, c'est à dire la somme d'argent que vous misez à chaque tour, le jeu reste équilibré et en moyenne vous ne gagner ni ne perder rien.

Définition 2.10. (temps d'arret)

Soit $\mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$ une filtration, et $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. T est un *temps d'arret si* pour tout n, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

Exemple de temps d'arret.

Exemple 2.11. Le temps d'arret constant, $\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\}$

Exemple 2.12. Soit $A \subset \mathbb{R}$ mesurable et X_n un processus adapté alors $T := \inf\{n : X_n \in A\}$ est un temps d'arret. En effet $\{T = n\} = \cap_{\forall k<n}\{X_k \notin A\} \cap \{X_n \in A\}$. Par contre le maximum n'est en générale pas un temps d'arret.

Proposition 2.13. *On a*

1. *$S \wedge T$ est un temps d'arret*
2. *$S \vee T$ est un temps d'arret*
3. *$\max S_i$ est un temps d'arret, $\inf S_i$ est un temps d'arret*

Démonstration. $\{T \wedge S \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. $\{T \vee S \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Pareillement $\{\max S_i \leq n\} = \cap\{S_i \leq n\}$ et $\{\inf S_i \leq n\} = \cup\{S_i \leq n\}$ □

Exemple

Définition 2.14. On définit la tribu $\mathcal{F}_T$ associé au temps d'arret T par $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

On verifie que c'est bien une tribu : En effet $\Omega \cup \{T = n\} = \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$,

$$\cup_{i\in I} A_i \cap \{T = n\} = \cup_{i\in I}(A_i \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n$$

and $A^c \cap \{T = n\} = \{T = n\} \cap (A \cap \{T = n\})^c \in \mathcal{F}_n$. Donc stable par union dénombrable et complémentaire.

Interprétation c'est la tribu qui contient l'information de ce qui s'est passé avant le temps d'arret.

Proposition 2.15. *Soit deux temps d'arret S et T tel que $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Proposition 2.16. *Soit X_n un processus adapté. On définit*

$$X_T = \begin{cases} X_n & si\ T = n \\ 0 & si\ T = \infty \end{cases}$$

Alors X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

Lemme 2.17. *Si M_n est une martingale (resp. sous martingale) alors $M_{n\wedge T}$ est une martingale (resp. sous martingale)*

Démonstration. On choisit le processus prévisible suivant

$$H_n = 1_{n \leq T}$$

En effet $H_n = 0 \Leftrightarrow T \leq n-1$ est donc bien $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable. Alors

$$(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{k \leq T}(M_k - M_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n \wedge T}(M_k - M_{k-1}) = M_{T \wedge n} - M_0$$

est une martingale. Puisque M_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable, $M_{T \wedge n} = (H \cdot M)_n + M_0$ est bien une martingale on en deduit le théorème de l'arret. $\square$

On peut alors en déduire le théorème suivant.

Théorème 2.18. *Soit T est un temps d'arret tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $T \leq N$ p.s. Si (M_n) est une martingale alors*

$$\mathbb{E}(M_T) = M_0$$

Si M_n est une sousmartingale alors

$$\mathbb{E}(M_T) \geq M_0.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_{T \wedge N}) = (\geq)\mathbb{E}(M_{T \wedge 0}) = \mathbb{E}(M_0)$$

où on a utiliser que $M_{n \wedge T}$ est une martingale (ou sousmartingale.) $\square$

[séance exercices.]
[correction des exercices.]

3 Convergences de martingales

3.1 Convergence presque sure.

Proposition 3.1. *Nombre de montés de Doob.*

$$(b-a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

Démonstration. On définit une suite de temps d'arret. T_i et S_i $S_i = \inf\{k \geq T_{i-1} : M_k \leq a\}$ et $T_i := \inf\{k \geq S_i : M_k \geq b\}$. On vérifie que ce sont des temps d'arret : On a $\{T_i = n\} = \cup_{l \leq n}\{S_{i-1} = l\} \cap \{M_n \geq k\} \cap_{l \leq m < n} \{M_m < k\}$ ce qui permet de conclure par récurrence immédiate. Et on définit le processus

$$H_n = \sum_i 1_{S_i < n \leq T_i}$$

C'est un processus prévisible : en effet $1_{S_i < n \leq T_i} = 0 \Leftrightarrow \{T_i > n-1\} \cup \{S_i \geq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Puisque $()_+$ est convexe, $\tilde{M} = (M_n - a)_+$ est une sousmartingale. Donc

$$\begin{aligned}
(H \cdot \tilde{M})_n &= \sum_i 1_{S_i < k \leq T_i} (\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k-1}) \\
&= \sum_{i, T_i \leq n} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\
&= \sum_{i \leq N_{a,b}} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\
&\geq (b-a) N_{a,b}
\end{aligned}$$

Donc

$$(b-a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((H \cdot \tilde{M})_n) \leq \mathbb{E}((1 \cdot \tilde{M})_n) = \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

□

Consequense : si $\mathbb{E}((M_n - a)_+) \leq C < \infty$ il y a en moyenne au plus $\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \frac{C}{(b-a)}$.

Si l'espérance de $\mathbb{E}((M_n - a)_+)$ est borné uniformément pour tout n, le nombre d'aller retour entre a et b est alors fini presque surement.

Théorème 3.2. *Théorème convergence presque sur.*
Si $\mathbb{E}((M_n)_+) \leq C < \infty$ pour tout n. Alors M_n converge presque surement.

Lemme 3.3. *Si pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$,$N_{a,b} < \infty$ alors il existe l tel que $u_n \to l$.*

Preuve : Pour tout $a \leq b$, au bout d'un certain temps : $u_n \geq a$ ou $u_n \leq b$. On $b_\infty = \inf b$ comme précédemment et $a_\infty = \sup a$ comme précédemment.

3.2 Convergence L^p

Proposition 3.4. *Inégalité maximale de Doob. Soit M_n une sousmartingale et $a \geq 0$. Alors*

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_n 1_{\sup_{k \leq n} M_k \geq a}) \leq \mathbb{E}((M_n)_+)$$

Démonstration. On introduit $T = \inf\{k : M_k \geq a\}$. Alors

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_T 1_{T \leq n})$$

□

Exercice 3.5. Soit M_n une sousmartingale et S, T deux temps d'arret. Si $S \leq T$ alors $\mathbb{E}(M_S) \leq \mathbb{E}(M_T)$.

En effet on choisit le processus prévisible $H_n = 1_{S < n \leq T}$ alors on a

$$M_T = M_S + (H \cdot M)$$

En particulier $0 = \mathbb{E}((H \cdot M)_0) \leq \mathbb{E}(H \cdot M)$
Dans la suite, nous notons $\tilde{M}_n = \sup_{k \leq n} M_k$.

Proposition 3.6. *Comparaisons martingale/maximum de martingale. Soit $p > 1$,*

1. *Soit une sous martingale positive, alors*
$$\mathbb{E}(\tilde{M}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(M_n^p).$$
2. *Soit M_n uue martingale, alors*
$$\mathbb{E}(|\tilde{M}_n|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_n|^p).$$

Théorème 3.7. *Théorème de convergence dans L^p. Soit $p > 1$.*

1. *Soit M_n une sousmartingale positive tel que $\exists C > 0$, pour tout n $\mathbb{E}(M_n^p) \leq C$ alors il existe M_∞ tel que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^p.*
2. *Soit M_n une martingale tel que $\exists C > 0$, pour tout n $\mathbb{E}(|M_n|^p) \leq C$ alors il existe M_∞ tel que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^p.*

3.3 Convergence L^1

Définition 3.8. On dit que M_n est une martingale fermée si il existe Z, $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ tel que $M_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$.

Théorème 3.9. *Soit M_n une martingale. On a équivalence entre*

1. *M_n converge p.s. et dans L^1.*
2. *M_n est une martingale fermée.*

Démonstration. Supposons que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^1. Soit $A \in \mathcal{F}_n$ alors pour tout $m \geq n$
$$\mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1_A M_n)$$
et donc puisque l'on a convergence dans L^1
$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A M_\infty)$$
soit $\mathbb{E}(1_A M_\infty) = \mathbb{E}(1_A M_n)$ de plus M_n est bien $\mathcal{F}_n$ mesurable. Par unicité de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$.

Supposons maintenant que M_n soit une martingale fermée. Soit $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}(|Z|1_{|Z|>C}) \leq \epsilon$. On pose $M_n^{(1)} = \mathbb{E}(|Z|1_{|Z|\leq C}|\mathcal{F}_n)$ et $M_n^{(2)} = \mathbb{E}(|Z|1_{|Z|>C}|\mathcal{F}_n)$. On a $M_n = M_n^{(1)} + M_n^{(2)}$. Ainsi que $|M_n^{(1)}| \leq C$ et $\mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) \leq \epsilon$. Alors $M_n^{(1)}$ est une martingale uniformement borné, elle converge donc p.s. De plus par $|M_n^{(1)}| \leq C$ et convergence dominé alors $M_n^{(1)}$ converge dans L^1. Il existe donc N tel que pour tout $n, m \geq N$, $\mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) < \epsilon$ et donc
$$\mathbb{E}(|M_n - M_m|) \leq \mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) + \mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) + \mathbb{E}(|M_m^{(2)}|) < 3\epsilon.$$
Ainsi M_n est une suite de Cauchy dans L^1 et donc converge dans L^1. Puisque pour tout n, $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|Z|)$, on a également la convergence p.s. $\square$

Exemple 3.10. Soit $f \in L^1([0,1])$. Considérons

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) 2^n \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f(s)ds.$$

Alors f_n converge vers f p.s. sur $[0,1]$ et dans L^1.

3.4 Le Théorème centrale limite pour les martingales

Rappel pour le théorème centrale limite classique. On a $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i des variables iid integrables tel que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$. Alors on a la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

ou $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi gaussienne.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}S_n}) &= \mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^n i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_j}) \\
&= \left[\mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_1})\right]^n \\
&= \left[1 + i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}(X_1) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2 n}\mathbb{E}(X_1) + o(\frac{\alpha^2}{n})\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{\alpha^2}{n} + o(\frac{\alpha^2}{n})\right]^n \\
&= \exp(-\alpha^2 + o(1))
\end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. □

Remarquer que S_n est une martingale particulière. On va maintenant adapter ce théorème à un ensemble de martingale plus générale.

Théorème 3.11. *Soit M_n une martingale, $M_0 = 0$ tel que*

1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout n, $|M_{n+1} - M_n| < C$,*
2. *$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) \to \sigma^2$ p.s. pour $N \to \infty$.*

Alors

$$\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

pour $N \to \infty$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,on cherche à calculer $\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}})$ pour cela on introduit F_n un processus prévisible tel que $e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n}$ soit une martingale. Construisons ce F_n, on a

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n} | \mathcal{F}_{n-1}) = e^{i\alpha\frac{M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}} - F_{n-1}}$$

soit

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n-M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}}}|\mathcal{F}_{n-1}) = e^{F_n-F_{n-1}}$$

alors

$$1+\frac{i\alpha}{\sigma\sqrt{N}}\mathbb{E}(M_n-M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})-\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{n}) = e^{F_n-F_{n-1}}$$

Puisque M_n est une martingale $\mathbb{E}(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ et donc

$$F_n - F_{n-1} = -\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{N})$$

Ainsi

$$F_N = \sum_{n=1}^{N}(F_n-F_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} -\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{N}) = -\alpha^2+o(1)$$

Conclusion

$$1 = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_0}{\sigma\sqrt{N}}-F_0}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}-F_N}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}+o(1)}\right)e^{\alpha^2}$$

Et on peut conclure $\mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}}\right) = e^{-\alpha^2+o(1)}$ qui est bien la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. □

4 Introduction aux chaine de Markov sur un ensemble discret

4.1 Définition des chaine de Markov

On peut décrire une chaine de Markov comme un processus aléatoire qui ne dépend pas du passé.

Définition 4.1. Soit E un ensemble dénombrable. On définit une matrice stochastique $Q : E \times E \to [0,1]$ tel que pour tout $x \in E$, $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$.

Définition 4.2. Une chaine de Markov associée à la Q est un processus X_n tel que

$$\mathbb{P}(X_n = x|X_0,\cdots,X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x|X_{n-1}) = Q(X_{n-1},x)$$

Exemple de Chaine de Markov : X_n des variables iid, S_n la somme de variables aléatoires, Une marche aléatoire sur des graphe,..

Remarque : il est possible de considérer des chaines de Markov dites inhomogène avec une matrice stochastique différente à chaque étape $\mathbb{P}(X_n = x|X_{n-1}) = Q_n(X_{n-1},x)$. Mais on ne s'intéressera dans la suite qu'à des chaines de Markov homogène.

4.1.1 Propriétés élémentaires de la matrice stochastique.

Définition 4.3. Une matrice stochastique Q agit sur les mesures de probabilité via

$$[Q\mu](y) = \sum_x \mu(x)Q(x,y).$$

Elle définit également une application sur l'ensemble des fonctions bornées sur E.

$$[Qf](x) = \sum_y Q(x,y)f(y).$$

Remarquer que l'on a bien $\sum_y [Q\mu](y) = 1$. Ces deux applications sont duales l'une de l'autre. En effet

$$\langle \mu, Qf\rangle = \sum_x \mu(x)Qf(x) = \sum_{x,y} \mu(x)Q(x,y)f(y) = \sum_x Q\mu(x)f(x) = \langle \mu, Qf\rangle$$

Proposition 4.4. *Le produit de matrices stochastique est une matrice stochastique.*

$$\sum_z [Q_1Q_2](x,z) = \sum_{z,y} Q_1(x,y)Q_2(y,z) = \sum_{,y} Q_1(x,y)\sum_z Q_2(y,z) = 1$$

4.1.2 Propriétés élémentaire de la chaine de Markov

Proposition 4.5. *On a*

1. *Pour tout* $(x_0,\cdots,x_n) \in E^{n+1}$, $\mathbb{P}(X_n = x_n,\cdots,X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0,x_1)Q(x_1,x_2)\cdots Q(x_{n-1},x_n)$.
2. *Si* μ *décrit la probabilité de* X_n *alors* $Q\mu$ *décrit la probabilité de* X_{n+1} *et pour tout* k $Q^k\mu$ *décrit la probabilité de* X_{n+k}.
3. X_{nk} *est une chaine de Markov de matrice stochastique* Q^k.
4. $\mathbb{E}_x(f(X_1)) = Qf$. *Plus généralement* $\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = Qf(X_n)$

4.2 Markov et martingale

On dit que f est harmonique si $Qf = f$, que f est sous harmonique si $Qf \geq f$ et surharmonique si $Qf \leq f$ On a la relation suivante

Proposition 4.6. *Soit* X_n *une chaine de Markov. Alors* $f(X_n)$ *est une (sous/sur)martingale ssi* f *est (sous/sur)harmonique.*

Démonstration. $\mathbb{E}(f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(f(X_n)|X_{n-1}) = \sum_y Q(X_{n-1},y)f(y) = f(X_{n-1})$ car f est harmonique. □

Exercice 4.7. Si f est harmonique sur G et soit $T = \inf\{n : X_n \notin G\}$ alors $f(X_{n\wedge T})$ est une martingale.

Exercice 4.8. Le temps d'arret d'une marche aléatoire non symétrique. Soit X_i iid avec $\mathbb{P}(X_i = 1)$ avec proba $1-p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1)$ avec probabilité p.

$S_n = x + \sum X_i$. Dans un exercice précédent $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$ et $T_b = \inf\{n : S_n = b\}$ avec $a \le x \le b$. $T = T_a \wedge T_b$. $\mathbb{P}(T = T_a)$ avec une martingale et le théorème de l'arret.

L'idée introduire la fonction $f(n) = \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^n$.

1-Montrer que f est harmonique.

On note $q = (1-p)$ alors

$$Qf(n) = p\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + q\frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p^n q}{q^n} + \frac{p^n p}{q^n} = \frac{p^n}{q^n}(p+q) = f(n)$$

.

2-Calculer $\mathbb{P}(T = T_a)$

$f(X_n)$ est une martingale. Donc

$$\frac{p^x}{q^x} = \mathbb{E}(f(X_0)) = \mathbb{E}(f(X_{n\wedge T})) \to \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{P}(T = T_a)\frac{p^a}{q^a} + (1-\mathbb{P}(T = T_a))\frac{p^b}{q^b}$$

Car la martingale est borné max $\frac{p^b}{q^b}, \frac{p^a}{q^a}$.

$$\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{\frac{p^x}{q^x} - \frac{p^b}{q^b}}{\frac{p^a}{q^a} - \frac{p^b}{q^b}}.$$

4.3 Propriétés de Markov faible et forte

Ces propriétés sont centrale pour les procéssus de Markov et dans le cours on les reverra et utilisera beaucoup pour le mouvement brownien.

Soit μ une mesure de proba sur E. On note $\mathbb{E}_\mu$ pour le processus de Markov avec condition initiale X_0 de loi aléatoire μ et simplement $\mathbb{E}_x$ si $\mu = \delta_x$.

Opérateur de décalage : $\theta_n : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ qui à $\theta_n(x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots) = (x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}, \cdots)$

La particularité de la chaine de Markov est tel que conditionnellement au point d'arrivé X_n au temps n, ce qui s'est passé avant $n-1$ et ce qui ce passe après n sont indépendant. Qui plus est puisque la chaine de Markov est homogène une chaine de Markov démarrée au temps n a la même loi qu'une chaine de Markov commencé au temps 0. C'est formellement ce qu'affirme le théorème suivant

Théorème 4.9. *(Propriété de Markov faible)*

Soit $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ avec F , $\mathcal{F}_n$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_n)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $F = 1_{X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n}$ et $G = 1_{X_0=z_0, X_1=z_1, \cdots, X_l=z_l}$. Alors $G \circ \theta_n = 1_{X_n=z_0, X_{n+1}=z_1, \cdots, X_{n+l}=z_l}$ et

$$\mathbb{E}_{X_n}(G) = 1_{X_n=z_0} Q(z_0, z_1)Q(z_1, z_2)\cdots Q(z_{n-1}, z_n).$$

Finallement

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_n))\\
&= \mathbb{E}_\mu 1_{X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n} 1_{X_n=z_0,X_{n+1}=z_1,\cdots,X_{n+l}=z_l}\\
&= \mu(x_0)Q(x_0,x_1)\cdots Q(x_{n-1},x_n)1_{x_n=z_0}Q(z_0,z_1)Q(z_1,z_2)\cdots Q(z_{n-1},z_n)\\
&= \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))
\end{aligned}
$$

Dans le cas générale $F=\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i$ et $G=\sum_{j=1}^M \beta_j G_j$ alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_n)) = \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\mathbb{E}_\mu(F_i(G_j\circ\theta_n)) = \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\mathbb{E}_\mu(F_i\mathbb{E}_{X_n}(G_j)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))$$

et on peut l'étendre à toute fonction F, G mesurable en prenant une F^n et G^n pouvant s'exprimer avec un nombre fini de fonction indicatrice et tel que $F^n \to F$, $G^n \to G$ dans L^1. □

On peut améliorer considérablement la propriété de Markov simple en considérant non pas un arret fixé à l'avance n mais avec un temps d'arret.

Théorème 4.10. *Propriété de Markov Forte*

Soit T un temps d'arret finit presque surement, $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ borné avec F $\mathcal{F}_T$ mesurable alors par propriété de Markov faible

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_T)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

Démonstration. Remarquer que $1_{T=n}F$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et donc

$$\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F(G\circ\theta_n)) = \mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_T)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F(G\circ\theta_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

□

Proposition 4.11. *Soit F et G deux ensemble disjoint tel que $E = F\cup G$ et soit g une fonction borné définit G. Soit $T = \inf\{n : X_n \in G\}$. On pose*

$$h(x) = \mathbb{E}_x(1_{T<\infty}g(X_T))$$

alors

1. *h est harmonique sur F,*
2. *$h(y) = g(y)$ pour tout $y \in G$.*

Si de plus $T < \infty$ p.s, alors h est l'unique fonction borné qui satisfait ces propriétés.

Démonstration. Pour tout $x \in G$, conditionnellement à $X_0 = x$ on a immediatement $T = 0$ et donc $h(x) = g(X_0) = g(x)$.

Pour $x \in F$, alors $T \geq 1$. On remarque que $X_T \circ \theta_1 = X_T$. Par propriété de Markov faible on a

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_1}(1_{T<\infty} g(X_T))) = \sum_y Q(x,y)\mathbb{E}_y(1_{T<\infty} g(X_T)) = Qh(x)$$

Et donc h est bien harmonique.

Supposons maintenant que $T < \infty$. Soit h' une autre fonction borné harmonique sur F et égale à g sur G. On introduit

$$M_n = h'(X_{n\wedge T})$$

D'après le Théorème, M_n est une martingale donc pour tout n.

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(h'(X_0)) = \mathbb{E}_x(h'(X_{n\wedge T}))$$

Puisque $T < \infty$ p.s et $h'(X_{n\wedge T}) \to h'(X_T) = g(X_T)$ p.s. De plus $h'(X_{n\wedge T})$ est bornée et par convergence dominé on conclut donc que

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T)) = h(x)$$

d'où l'unicité de h. □

4.4 Application Le problème de Dirichlet discret.

Soit $B \subset \mathbb{Z}^d$ on définit le Laplacient discret Δ sur les fonction $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ ainsi

$$[\Delta u](x) = \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} (u(y) - u(x))$$

Soit g une fonction sur ∂B. On cherche u tel que

1. $\Delta u|_B = 0$,
2. $u(y) = g(y)$ pour tout $y \in \partial B$.

On observe que $\Delta u|_B = 0$ est équivalent à $u(x) = \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} u(y)$ soit $u(x) = Qu(x)$ avec Q la matrice stochastique de la marche aléatoire $X_n$sur le graphe $\mathbb{Z}^d$. Ainsi u est harmonique et $T = \inf\{n : X_n \notin B\}$ est fini presque surement car B est borné. Ainsi

$$u(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T))$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet.

Deuxième partie

Mouvement Brownien

Troisième partie

Martingales Continues