

Partie V

Electromagnétisme dans la matière

Introduction

Nous nous proposons dans cette partie de décrire la propagation des champs électromagnétiques dans la matière dense. En fait, l'objet essentiel de ce chapitre sera de donner un contenu physique précis à la notion d'indice de réfraction et d'étudier la propagation de la lumière dans un certain nombre de milieux choisis pour leur caractère exemplaire.

Les équations de Maxwell doivent décrire de façon parfaitement satisfaisante la propagation dans les milieux matériels à condition d'inclure *toutes* les sources du champ électromagnétique. Il y a a priori deux sortes de courants ou de répartitions de charges. Il y a, d'une part, les courants macroscopiques produits par les générateurs ou les sources, en général contrôlés par l'expérimentateur, et descriptibles dans les termes que nous avons déjà employés dans les chapitres précédents. Il y a, d'autre part, tous les courants, plus ou moins incontrôlés, qui décrivent tous les transports de charge dans la matière dense. Tous les électrons d'un milieu peuvent contribuer à la propagation d'une onde. Nous appellerons charges (ou courants) *libres* les premiers, charges ou courants *liés* les seconds. Libres, parce qu'ils sont sous contrôle de l'expérimentateur, liés parce qu'ils correspondent aux mouvements de charges liées à la matière.

Il est évident que les charges libres ne nous poseront pas plus de problèmes que dans l'espace libre et qu'une adaptation des solutions en potentiels retardés ou des développements multipolaires suffira à les traiter. Ce qui rend le problème complexe, c'est bien sûr la présence des charges liées. On doit a priori tenir compte de toutes les charges du milieu et décrire les champs électriques intra-atomiques autant que celui de l'onde plane que nous essaierons de propager! On est en fait dans une situation analogue à celle de la mécanique quand elle essaie de décrire un gaz en tenant comptabilité de la position et de la vitesse de toutes les molécules. Comme en thermodynamique, nous n'aurons pas besoin de connaître explicitement les champs microscopiques dans leur horrible complexité. Il serait d'ailleurs tout à fait illusoire de chercher à les mesurer. Les seules quantités qui nous intéresseront seront des moyennes d'ensemble à l'échelle macroscopique de nos sources et de nos détecteurs.

L'objet du premier chapitre de cette partie sera donc de définir des processus de moyennage, de lissage, permettant de dériver des champs à l'échelle microscopique à partir des champs ayant une échelle de variation macroscopique. Cette échelle devra cependant être assez fine pour une description précise des phénomènes macroscopiques. Elle devra par exemple, pour un problème de propagation, être petite devant la longueur d'onde. Chaque atome, chaque molécule du milieu ne joue, dans ces moyennes, de rôle qu'à une distance très grande par rapport à sa taille. Nous pourrons donc utiliser les techniques de développements multipolaires du chapitre précédent pour traiter ce champ. Nous définirons donc des densités macroscopiques de polarisation, dipolaire ou quadripolaire électrique et dipolaire magnétique. Nous montrerons enfin que les équations décrivant les champs moyennés sont les équations de Maxwell, à condition d'y faire intervenir des densités de charge et de courant, elles aussi macroscopiques, liées aux dérivées spatiales et temporelles des densités de polarisation. Nous aurions donc résolu le problème si nous connaissions ces densités de polarisation.

En général, on ne peut rien dire des densités de polarisation. Elles dépendent en effet évidemment des champs appliqués qui, en retour, dépendent des densités de polarisation. Nous trouverons dans le deuxième chapitre une issue à ce problème. Nous supposerons, comme c'est pratiquement toujours le cas, que les champs appliqués seront assez faibles pour que le matériau réponde de façon

linéaire à l'excitation. Autrement dit, les densités de polarisation seront des fonctions linéaires des champs électriques et magnétiques macroscopiques, ce qui nous permettra enfin d'écrire les équations de propagation, les équations de Maxwell dans la matière, sous une forme close. Nous introduirons les susceptibilités électriques et magnétiques qui décrivent ces relations de proportionnalité, et nous donnerons quelques modèles simples de thermodynamique statistique pour prévoir leurs ordres de grandeur. Enfin, nous établirons sur ces susceptibilités, des résultats très généraux s'appliquant à priori à toute théorie de la réponse linéaire. Nous montrerons en effet que la simple causalité impose des relations très fortes entre les parties réelles et imaginaires des susceptibilités. Comme les unes décrivent l'indice de réfraction et les autres l'absorption par le milieu, nous en déduisons des relations très profonde entre dispersion et absorption.

Dans le dernier chapitre, enfin, nous appliquerons tout cela à des problèmes de propagation. Nous essaierons de comprendre pourquoi la plupart des milieux sont absorbants. Nous verrons à quelles conditions un milieu matériel peut être amplificateur pour les ondes lumineuses et nous inventerons en passant le laser. Nous envisagerons aussi la propagation dans les plasmas ou les métaux, équivalents de ce point de vue. Nous nous pencherons aussi sur les conditions de passage entre deux milieux différents. Nous en déduisons, dans le cas des diélectriques transparents, les lois de Descartes–Snell de la réfraction, mais aussi les coefficients de Fresnel qui décrivent les amplitudes relatives des ondes réfléchies et réfractées.

Chapitre 1

Equations de Maxwell dans la matière

La première étape de notre travail est donc d'écrire, de manière consistante, des valeurs moyennes macroscopiques à partir des champs et sources réels.

1.1 Champs et charges microscopiques et macroscopiques

Nous noterons ρ_t et \mathbf{j}_t les densités de charges et de courant complètes, incluant les charges liées et les charges libres. Si nous notons \mathbf{e} et \mathbf{b} les vrais champs électrique et magnétique à l'échelle microscopique, ils sont déterminés par ρ_t et \mathbf{j}_t et par les équations de Maxwell sous leur forme habituelle, qu'il n'est peut être pas nécessaire de rappeler encore une fois.

Nous voulons définir des moyennes des quantités ci dessus à une échelle très grande par rapport à la taille atomique, ou par rapport aux distances entre molécules voisines. Nous devons d'autre part pouvoir décrire des phénomènes ondulatoires. Il faudra donc que l'échelle de moyennage reste petite par rapport à la longueur d'onde du rayonnement considéré. Nous choisirons donc l'échelle de notre moyennage, s_0 , de telle manière que:

$$a_0 \ll s_0 \ll \lambda, \quad (1.1)$$

où a_0 est le rayon de Bohr, qui est aussi l'ordre de grandeur de la distance entre particules dans la matière dense. Si nous nous intéressons à des ondes optiques, les longueurs d'onde étant de l'ordre du micron et a_0 de la fraction d'Ångström, nous pouvons trouver facilement une échelle intermédiaire aux environs de la dizaine de nanomètres. Une sphère de rayon s_0 contient un très grand nombre d'atomes, tout en restant un petit objet à l'échelle de la propagation. Bien sûr, nous nous interdisons ainsi de décrire la propagation d'une onde de longueur d'onde comparable à a_0 , dans le domaine des rayons X. La propagation d'une telle onde est beaucoup mieux décrite en termes de diffraction par le réseau cristallin qu'en termes d'indice de réfraction. Nous nous interdisons aussi de décrire des milieux très dilués. Mais il est évident que ces milieux sont essentiellement identiques au vide.

Nous définissons une fonction de lissage, d'extension s_0 , $W(\mathbf{s})$, homogène à l'inverse d'un volume. Nous pourrions par exemple prendre une fonction gaussienne, de la forme $\exp(-s^2/s_0^2)/s_0^3$, avec un coefficient de normalisation convenable pour que l'intégrale sur tout l'espace de W soit égale à un. Notons que W doit être une fonction à symétrie sphérique pour respecter l'invariance par rotation des équations de Maxwell. Il est aussi important qu'elle varie régulièrement à l'échelle de s_0 . Si nous prenions par exemple pour W la fonction caractéristique d'une sphère de rayon r_0 , nous risquerions de ne pas obtenir des champs lisses à l'échelle macroscopique. Il suffirait en effet de déplacer cette sphère d'une quantité voisine de a_0 pour englober dans la moyenne un électron de plus ou de moins. Comme la matière est en général globalement neutre, on pourrait ainsi modifier considérablement la densité moyennée de charges par un déplacement microscopique de la sphère d'intégration. Notons également que les résultats de notre travail seront complètement indépendants de la forme de W et de l'échelle de moyennage s_0 . Nous n'aurons d'ailleurs jamais à réaliser effectivement un de ces moyennages,

puisque nous ne connaissons jamais les champs microscopiques. Nous définissons alors les quantités macroscopiques moyennées comme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{e}(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t) W(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t) W(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \quad (1.3)$$

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \int \rho_t(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t) W(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{j}_t(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t) W(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} . \quad (1.5)$$

Ces quantités ne peuvent, par construction, varier plus rapidement que s_0 . Elles ont donc toutes les bonnes caractéristiques pour jouer le rôle de variables macroscopiques. Les équations de Maxwell étant linéaires, elles commutent avec cette opération de prise de valeur moyenne par une intégration. Les quantités moyennées obéissent donc rigoureusement aux équations de Maxwell.

Dans les sources, nous pourrons, comme nous le mentionnions dans l'introduction, séparer les contributions des charges libres et des charges liées. Nous écrirons ϱ et \mathbf{J} sous la forme:

$$\varrho = \rho + \rho_\ell \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_\ell , \quad (1.7)$$

où ρ et \mathbf{j} sont les densités de charges libres, et ρ_ℓ , \mathbf{j}_ℓ les densités de charges et de courant liées à la matière. Nous ne nous préoccupons plus pendant un moment des densités libres, qui se traitent comme dans le vide. Notons toutefois qu'il s'agit de quantités moyennées à l'échelle s_0 . Il n'y aurait plus de sens à parler dans notre approche d'une charge ponctuelle ou de tenter de déterminer les champs sur des échelles de distance inférieures à s_0 .

1.2 Distributions moyennées

Nous allons maintenant tenter de décrire les charges liées. Nous allons pour cela regrouper les charges de la matière en molécules. Cette approche est bien sûr justifiée par la composition de la matière, mais elle nous permettra, surtout, de décrire les champs produits par une molécule en termes de développements multipolaires.

1.2.1 Densités microscopiques

Nous diviserons donc l'énorme collection de charges liées en molécules. Une charge liée restera toujours attachée à la même molécule. Nous indiquerons les molécules du milieu avec un indice m . Une molécule pouvant contenir plusieurs charges, nous indiquerons les charges à l'intérieur de chaque molécule par un indice grec β . Nous noterons donc $q_{m\beta}$ la charge d'une des charges de la molécule m , $\mathbf{r}_{m\beta}$ sa position et $\mathbf{v}_{m\beta}$ sa vitesse. Les densités de charge et de courant liées avant moyennage sont données respectivement par:

$$\sum_{m,\beta} q_{m\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m\beta}) \quad (1.8)$$

$$\sum_{m,\beta} q_{m\beta} \mathbf{v}_{m\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m\beta}) . \quad (1.9)$$

En plus de ces quelques notations, nous allons faire des hypothèses réalistes sur nos molécules. Nous allons tout d'abord les supposer immobiles. Tout au moins, nous supposerons qu'elles se déplacent suffisamment peu ou suffisamment lentement pour que ce déplacement n'affecte pas la propagation.

Comme nous ne manipulerons que des quantités moyennées à l'échelle s_0 , nous n'aurons à exclure que les mouvements d'ensemble à une échelle macroscopique. L'agitation dans les gaz, par exemple, a un libre parcours moyen si petit (quelques dizaines d'Ångströms à pression ambiante) que ces mouvements n'influent en rien sur la propagation d'une onde optique. Si nous avons un déplacement d'ensemble suffisamment rapide, la propagation en serait affectée. Un champ en un endroit crée une polarisation moyenne qui pourrait se propager en un autre endroit et contribuer au rayonnement d'une autre région: il apparaîtrait des termes de convection dans les équations de propagation. Notons toutefois qu'il serait possible de tenir compte de ces déplacements d'ensemble au prix de quelques complications arithmétiques sans importance. Nous expliquerons brièvement comment les équations de Maxwell dans la matière sont modifiées dans un milieu en mouvement. Nous négligerons aussi toute action mécanique du champ sur les particules. Nous ne considérerons pas le cas où le champ pourrait induire des déplacements d'ensemble ou des variations de densité. Très généralement, l'action des champs sur les degrés de liberté externes des molécules est complètement négligeable devant l'agitation thermique ou les forces de liaison des cristaux. Ce n'est qu'au voisinage immédiat d'une transition de phase ou d'un point critique, par exemple, que cette petite perturbation peut avoir un effet important sur le milieu. Il faut citer aussi les milieux dilués d'atomes refroidis par laser où on pourrait observer ce genre d'effets.

Si nous notons \mathbf{r}_m la position de la m -ième molécule (par exemple la position de son centre de gravité, ou de tout autre point remarquable situé au sein de la molécule), nous aurons donc:

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{v}_m = 0 . \quad (1.10)$$

Nous allons supposer aussi que nos molécules sont neutres ($\sum_{\rho} q_{m\rho} = 0$). Si ce n'était pas le cas, elles ne pourraient créer, puisqu'elles sont statistiquement immobiles, qu'une répartition de charges électrostatiques, dont le champ serait aisément calculable et qui, de toutes façons, ne contribueraient aucunement au rayonnement.

Nous pouvons maintenant repérer la position des charges de la molécule m par rapport à la position constante de celle-ci. Nous écrirons donc:

$$\mathbf{r}_{m\beta} = \mathbf{r}_m + \boldsymbol{\xi}_{m\beta} , \quad (1.11)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est par hypothèse une quantité de l'ordre de a_0 , taille de la molécule. \mathbf{r}_m étant constant, on peut réécrire les densités de charge et de courant liées avant moyennage comme:

$$\sum_{m,\beta} q_{m\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\xi}_{m\beta}) \quad (1.12)$$

$$\sum_{m,\beta} q_{m\beta} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\xi}_{m\beta}) . \quad (1.13)$$

1.2.2 Moments multipolaires

Après moyennage, on ne regarde les champs qu'à une échelle de l'ordre de s_0 . La taille des molécules étant de l'ordre de a_0 , il est naturel de traiter leurs champs par un développement multipolaire. Comme elles sont neutres, ne peuvent intervenir que les termes dipolaires électriques, à l'ordre dominant, et dipolaires magnétiques et quadripolaires électriques à l'ordre suivant. Nous nous arrêterons là. En général, les termes quadripolaires électriques jouent un rôle complètement négligeable pour la propagation dans la matière mais, comme ils apparaissent au même ordre de développement que les termes dipolaires magnétiques, il nous faut les conserver un temps pour assurer la cohérence de nos développements. Nous décrivons donc une molécule par son dipôle électrique:

$$\mathbf{p}_m(t) = \sum_{\beta} q_{m\beta} \boldsymbol{\xi}_{m\beta} , \quad (1.14)$$

son dipôle magnétique:

$$\mathbf{m}_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta} q_{m\beta} \boldsymbol{\xi}_{m\beta} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} , \quad (1.15)$$

et enfin son quadripôle électrique, dont les composantes s'écrivent:

$$q_{mij}(t) = \sum_{\beta} q_{m\beta} \xi_{m\beta i} \xi_{m\beta j} . \quad (1.16)$$

L'ensemble des multipôles ainsi recensés peuvent être décrits par des densités de polarisation, en ajoutant juste des fonctions δ centrées sur les molécules. Les densités de polarisation microscopiques sont donc données par:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{p}_m(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{m}_m(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{q}_m(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) . \quad (1.19)$$

Nous allons maintenant procéder au lissage de ces distributions microscopiques.

1.2.3 Densités macroscopiques

Le moyennage par la fonction W des densités microscopiques de charges liées redonne les charges liées qui peuvent donc s'écrire:

$$\rho_{\ell}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m,\beta} q_{m\beta} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\xi}_{m\beta}) \quad (1.20)$$

$$\mathbf{j}_{\ell}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m,\beta} q_{m\beta} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\xi}_{m\beta}) . \quad (1.21)$$

Il est en effet tout à fait évident que la convolution de la fonction de lissage W par une fonction de Dirac donne une fonction W du même argument que la fonction de Dirac initiale. On lit directement sur les expressions précédentes que l'échelle de variation de ces quantités ne peut pas être plus petite que s_0 .

On définira de même des densités de polarisation moyennes en moyennant les quantités microscopiques introduites à la fin du paragraphe précédent. On aura:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{p}_m W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (1.22)$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{m}_m W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (1.23)$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{q}_m W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) . \quad (1.24)$$

On notera que \mathcal{Q} , comme le moment quadripolaire d'une molécule unique, est, avec nos notations, un tenseur symétrique.

Ces densités de polarisation ont une signification physique bien plus profonde que les charges liées elles-même. Si rien ne permet à priori de mesurer les densités moyennes de charges liées, la densité de polarisation exprime que chaque élément de volume se comporte comme un petit dipôle électrique ou magnétique, dont le champ est au moins en principe mesurable. Il serait donc préférable de faire intervenir dans les équations de Maxwell macroscopiques les densités de polarisation plutôt que les charges liées, plus obscures. Nous allons maintenant montrer qu'on peut effectivement exprimer charges et courant liés en fonction des dérivées spatiales et temporelles des densités de polarisation. En quelque sorte, nous allons inverser la définition de ces densités de polarisation.

1.2.4 Expression des densités de charges liées

Densité de charges

Nous allons commencer par la densité de charges, donnée par (1.20). Nous allons développer, dans cette expression, la fonction W en puissance de ξ . En effet, la fonction ne varie qu'à l'échelle s_0 et ξ est d'ordre a_0 . On peut donc sans problèmes effectuer un développement de Taylor de chacun des termes de la source par rapport à $\xi_{m\beta}$. On écrira:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \xi_{m\beta}) = W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) - \xi_{m\beta} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \xi_{m\beta i} \xi_{m\beta j} \partial_i \partial_j W, \quad (1.25)$$

où les dérivées de W s'entendent par rapport à son argument \mathbf{r} et doivent toutes être évaluées en $\mathbf{r} - \mathbf{r}_m$. Nous avons poussé ce développement à l'ordre 2. Nous verrons que c'est nécessaire pour retrouver les termes quadripolaires électriques. En portant ce développement dans (1.20), on trouve la densité de charges sous la forme d'une somme de trois termes:

$$\rho_\ell = \rho_\ell^{(0)} + \rho_\ell^{(1)} + \rho_\ell^{(2)}, \quad (1.26)$$

faisant intervenir les puissances successives de ξ .

Il est évident que le terme d'ordre 0 s'annule. La fonction W , constante, sort de la somme sur les charges de la molécule m et il reste un terme en $\sum_\beta q_{m\beta}$, nul puisque la molécule est neutre. Le terme d'ordre 1 s'écrit:

$$\rho_\ell^{(1)} = - \sum_m \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \sum_\beta q_{m\beta} \xi_{m\beta}. \quad (1.27)$$

On reconnaît facilement dans la somme sur β le moment dipolaire de la molécule, \mathbf{p}_m . Du point de vue de la dérivation par rapport à l'argument de W , cette quantité est bien entendu une constante, et on peut écrire:

$$\rho_\ell^{(1)} = - \nabla \cdot \sum_m \mathbf{p}_m W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) = - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (1.28)$$

Comme nous le désirions, ce terme se calcule très simplement comme la divergence de la densité macroscopique de polarisation.

L'interprétation physique de ce terme est tout à fait transparente. Considérons un milieu, tel que celui représenté sur la figure 1.1, dont la densité de polarisation est uniforme, alignée avec Oz , dans une tranche d'espace d'épaisseur L perpendiculaire à Oz . On peut représenter chaque molécule comme un petit dipôle. On peut imaginer par exemple ces petits dipôles strictement alignés le long de la direction de polarisation. Si on prend un élément de volume quelconque dans le milieu, la densité moyenne de charges sera nulle parce que chaque tête positive d'une molécule quelconque est exactement compensée par la tête négative d'une molécule voisine. On trouve donc bien, avec cette image physique très simple, que la densité de charges dans le milieu uniformément polarisé est nulle. En revanche, si nous considérons un élément de volume recouvrant une interface du milieu avec l'extérieur, nous ne trouverons pas une charge nulle. Les charges à l'extrémité des molécules qui se trouvent immédiatement à la surface n'ont en effet aucune voisine pour les compenser. En un mot, nous trouverons des densités surfaciques de charge, positives sur la face d'entrée, négatives sur la face de sortie, ce qui est précisément le comportement de la divergence de \mathbf{P} (au signe près) dans ce cas. Bien sûr, comme nous ne manipulons que des quantités moyennées à l'échelle macroscopique, nous avons une répartition continue de charges qui varie sur une échelle de l'ordre de s_0 . Cette échelle étant négligeable par rapport aux dimensions caractéristiques du problème, on pourra toutefois assimiler cette distribution de charges à une répartition surfacique.

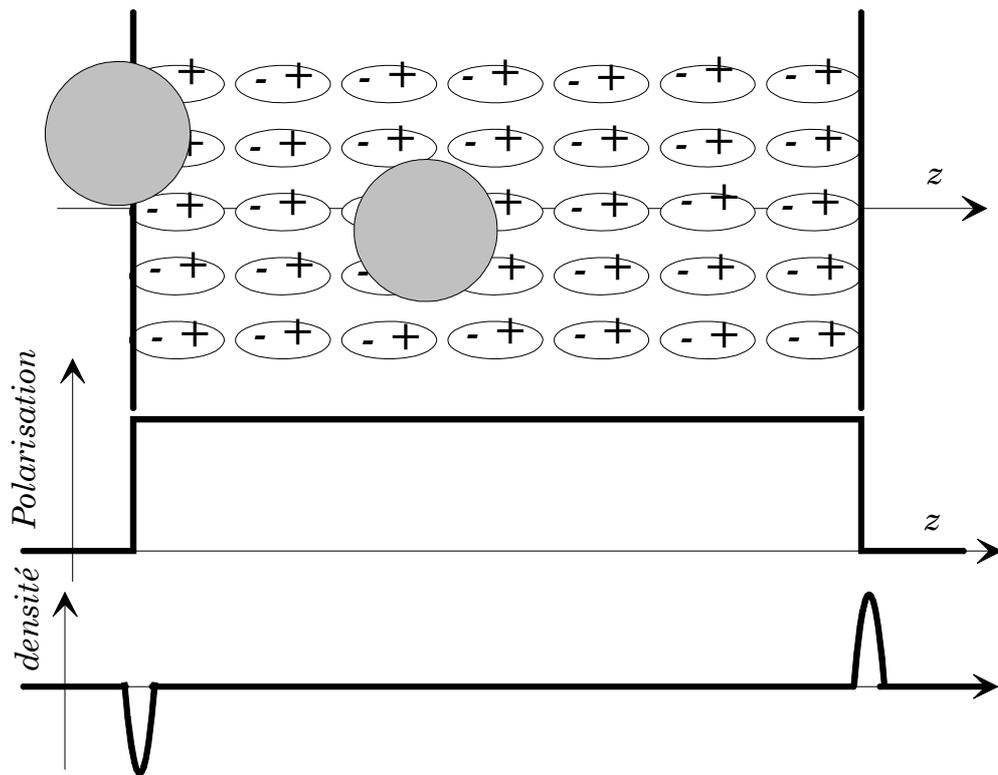


Figure 1.1: Répartition de charges dans un milieu uniformément polarisé. A l'intérieur du milieu, les charges de molécules voisines se compensent exactement. En revanche, sur les faces du milieu, apparaissent des densités surfaciques de charges. En grisé, on a représenté deux volumes de calcul de la densité moyenne de charges.

Ecrivons maintenant le terme d'ordre 2, dont il est d'ores et déjà évident qu'il fera intervenir la densité de quadripôles. Après quelques réarrangements, on a :

$$\rho_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_j \partial_j \left\{ \sum_i \partial_i \left[\sum_{m,\beta} q_{m\beta} \xi_{m\beta i} \xi_{m\beta j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right] \right\} . \quad (1.29)$$

Dans le crochet le plus intérieur, on reconnaît une composante de $\sum_m \mathbf{q}_m W$, c'est à dire de la densité moyenne de quadripôle \mathcal{Q} . On a donc, en recourant un moment aux notations d'Einstein,

$$\rho_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \partial_j \partial_i \mathcal{Q}_{ij} . \quad (1.30)$$

En posant, comme nous l'avions déjà fait dans la quatrième partie,

$$\nabla \cdot \mathcal{Q}_j = \partial_i \mathcal{Q}_{ji} , \quad (1.31)$$

on peut écrire :

$$\rho_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathcal{Q}) . \quad (1.32)$$

En regroupant enfin avec le terme d'ordre 1, nous allons trouver :

$$\rho_\ell = -\nabla \cdot (\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q}) , \quad (1.33)$$

le premier résultat essentiel de ce paragraphe.

Densité de courant

Nous allons maintenant procéder de la même manière pour la densité de courant lié. Nous développerons, dans l'expression (1.21), la fonction W en puissances de ξ . Toutefois, nous verrons qu'il suffit de pousser le développement à l'ordre un pour trouver les termes dipolaires magnétiques et quadripolaires électriques. Nous écrirons donc :

$$\mathbf{j}_\ell = \mathbf{j}_\ell^{(0)} + \mathbf{j}_\ell^{(1)} . \quad (1.34)$$

Le premier terme s'écrit simplement :

$$\mathbf{j}_\ell^{(0)} = \sum_{m,\beta} q_{m\beta} \dot{\xi}_{m\beta} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) . \quad (1.35)$$

En isolant la somme sur β , dont la fonction W peut être sortie, on voit immédiatement intervenir :

$$\frac{d}{dt} \sum_\beta q_{m\beta} \xi_{m\beta} = \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} . \quad (1.36)$$

En constatant enfin que W ne dépend pas du temps, on a :

$$\mathbf{j}_\ell^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (1.37)$$

L'interprétation physique de ce terme est, là aussi, transparente. Si la polarisation du milieu varie, c'est que les molécules se déplacent ou se polarisent de façon différente. Cela résulte bien sûr en des déplacements de charges. Ils sont à l'échelle microscopiques, mais, comme toutes les molécules d'un même voisinage voient leur polarisation varier de la même manière, ces courants ont une moyenne non nulle à l'échelle macroscopique.

Le terme d'ordre 1 va nous demander un peu plus d'efforts. Il s'écrit en effet:

$$\mathbf{j}^{\ell(1)} = - \sum_{m,\beta} q_{m\beta} (\boldsymbol{\xi}_{m\beta} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} . \quad (1.38)$$

Comme nous l'avons fait en calculant le champ de dipôle magnétique et du quadripôle électrique, nous allons mettre artificiellement ce terme sous la forme d'un double produit vectoriel (l'analogie entre les deux calculs est bien sûr loin d'être fortuite). On écrit pour cela:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\xi}_{m\beta} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} &= \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\xi}_{m\beta} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} - \boldsymbol{\xi}_{m\beta} \left(\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\xi}_{m\beta} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} + \boldsymbol{\xi}_{m\beta} \left(\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

et donc:

$$\mathbf{j}^{\ell(1)} = \mathbf{j}_\ell^{(1)'} + \mathbf{j}_\ell^{(1)''} , \quad (1.40)$$

avec:

$$\mathbf{j}_\ell^{(1)'} = \frac{1}{2} \sum_{m,\beta} q_{m\beta} \nabla W \times \left[\boldsymbol{\xi}_{m\beta} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta} \right] , \quad (1.41)$$

l'autre terme étant défini pour compenser les termes additionnels introduits dans le premier. En isolant la somme sur m , en sortant la fonction W de la somme sur β , nous faisons apparaître le moment magnétique de la molécule m , $\frac{1}{2} \sum_{\beta} q_{m\beta} \boldsymbol{\xi}_{m\beta} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}_{m\beta}$. Nous avons donc:

$$\mathbf{j}_\ell^{(1)'} = \sum_m \nabla W \times \mathbf{m}_m . \quad (1.42)$$

Le moment magnétique de la molécule ne dépendant pas de la position dans l'espace, nous pouvons regrouper ces termes en faisant apparaître la densité macroscopique de moment magnétique:

$$\mathbf{j}_\ell^{(1)'} = \nabla \times \mathcal{M} . \quad (1.43)$$

L'interprétation physique de ce terme est très similaire à celle de la densité de charges. Considérons un barreau uniformément aimanté d'axe Oz , tel que celui représenté sur la figure 1.2. Nous pouvons remplacer chacun des dipôles magnétiques de ce barreau par une petite boucle carrée de courant, dont la taille est égale à la séparation entre boucles voisines. Toutes ces boucles sont parcourues par le même courant. Si nous considérons un point arbitraire dans le milieu (ou plutôt un voisinage d'extension s_0 , les courants de boucles adjacentes s'annulent exactement: il n'y a pas de courants macroscopiques dans un milieu uniformément aimanté. En revanche, si nous considérons des points proches de la surface, les courants ne sont plus compensés. Il apparaît un courant de surface, ce qui est précisément l'aspect du rotationnel de l'aimantation comme on s'en convaincra aisément. Vu de l'extérieur, un barreau aimanté a donc la même répartition de courant qu'un solénoïde. On justifie ainsi l'évidente similitude des lignes de champ de ces deux objets. Notons que la densité de courant ainsi obtenue peut être considérable, de l'ordre de 10^6 A/m pour des aimants ordinaires. Elle résulte en effet de l'addition cohérente d'un très grand nombre de courants atomiques.

Traisons maintenant le second terme du courant à l'ordre 1. Sa composante j s'écrit:

$$\mathbf{j}_\ell^{(1)''}{}_j = -\frac{1}{2} \sum_{m,\beta} q_{m\beta} \left[\sum_i \xi_{m\beta i} \partial_i W \dot{\xi}_{m\beta j} + \sum_i \dot{\xi}_{m\beta i} \partial_i W \xi_{m\beta j} \right] . \quad (1.44)$$

On reconnaîtra aisément dans cette forme la composante j d'une dérivée par rapport au temps d'une quantité égale à:

$$-\frac{1}{2} \partial_i \sum_{m,\beta} q_{m\beta} \xi_{m\beta i} \xi_{m\beta j} , \quad (1.45)$$

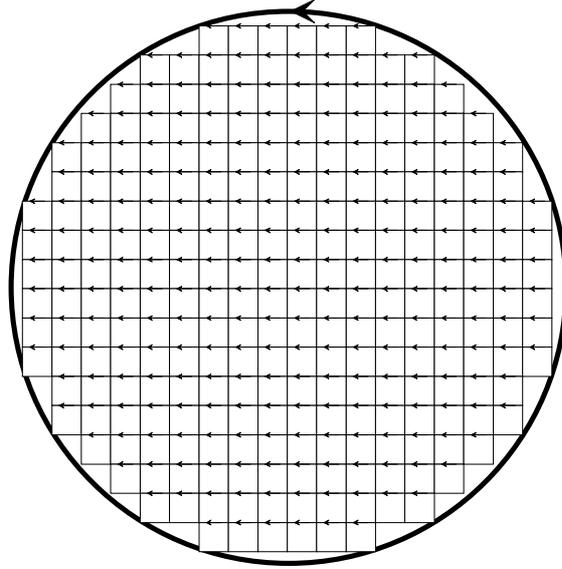


Figure 1.2: Section d'un barreau uniformément aimanté et représentation des courants microscopiques. Ils se compensent exactement, sauf au voisinage de la surface. Vu de l'extérieur, le barreau a le même champ magnétique qu'un solénoïde.

c'est à dire la dérivée par rapport au temps de la divergence du champ de quadripôle:

$$\mathbf{j}_\ell^{(1)''}{}_j = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q}. \quad (1.46)$$

Cette dérivée par rapport au temps, liée aux mouvements de charges imposés par une redistribution de la densité de quadripôles, se regroupe facilement avec le courant d'ordre 0 et on a finalement:

$$\mathbf{j}_\ell = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q} \right) + \nabla \times \mathcal{M}. \quad (1.47)$$

Ceci est le deuxième résultat essentiel de ce paragraphe. Nous avons rempli totalement notre programme en exprimant ρ_ℓ et \mathbf{j}_ℓ en fonction des dérivées spatiales et temporelles de \mathcal{M} et de $\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q}$. On constate d'ailleurs que les densités de dipôles et quadripôles électriques apparaissent toujours sous la forme de la même combinaison. Nous avons conservé la densité de quadripôles pour la cohérence de nos développements. Il est toutefois évident qu'elle jouera un rôle négligeable par rapport à la densité dipolaire, à moins que celle-ci ne soit nulle.

Nous avons totalement négligé, dans cette approche, les mouvements d'ensemble des molécules. Si on tenait compte correctement dans ce qui précède des termes en $\dot{\mathbf{r}}_m$, on montrerait que la densité de charges n'est pas modifiée ($\dot{\mathbf{r}}_m$ n'y apparaît pas), mais qu'il apparaît un terme convectif dans la densité de courants liés:

$$\mathbf{j}_\ell = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q} \right) + \nabla \times \mathcal{M} - \nabla \times \left[\mathbf{V} \times \left(\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q} \right) \right], \quad (1.48)$$

où \mathbf{V} est la vitesse d'ensemble locale des molécules. On comprend bien en effet que le transport macroscopique d'une densité de polarisation soit équivalent à un courant.

1.3 Equations de Maxwell macroscopiques

Nous allons maintenant utiliser les expressions précédentes des charges et courants liés pour réécrire les équations de Maxwell à l'échelle macroscopique.

1.3.1 Déplacement électrique, Induction magnétique

Les équations de Maxwell homogènes restent bien sûr inchangées dans les opérations de moyennage:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.50)$$

L'équation de Maxwell–Gauss se réécrit:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_\ell)/\epsilon_0, \quad (1.51)$$

où ρ est, rappelons-le, la densité de charges libres moyennée. En remplaçant ρ_ℓ par l'expression (1.33), on voit que cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.52)$$

où le vecteur \mathbf{D} , appelé déplacement électrique, est défini par:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q}. \quad (1.53)$$

Bien sûr l'introduction de ce vecteur ne fait, à ce stade, que simplifier les écritures. Il faudrait pouvoir écrire explicitement les densités de polarisation pour lui donner un sens utile.

Finalement, l'équation de Maxwell ampère peut s'écrire, en remplaçant les courants liés par leur expression (1.47),

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathcal{Q} \right) + \nabla \times \mathcal{M} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.54)$$

En regroupant les dérivées par rapport au temps, on peut faire apparaître le déplacement électrique \mathbf{D} . En regroupant les termes en rotationnel, on peut finalement mettre cette équation sous la forme:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.55)$$

en introduisant l'induction magnétique \mathbf{H} définie par:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathcal{M}. \quad (1.56)$$

Nous avons finalement obtenu, par de simples jeux de réécriture, quatre équations qui ont à peu près la forme des équations de Maxwell et qui ne font apparaître que les densités de charges et de courants libres, qui sont sous le contrôle de l'expérimentateur. La difficulté est bien sûr que ces équations sont écrites en fonction de quatre champs: les champs électriques et magnétiques traditionnels, le déplacement électrique et l'induction magnétique (ces noms ont été donné historiquement très tôt dans le développement de l'électromagnétisme et ont été conservés depuis). Il n'y a donc pas de solution unique à cet ensemble d'équations, sous déterminées. Ce n'est qu'en précisant les relations entre les densités de polarisation et les champs que nous pourrions exprimer les deux nouveaux champs en fonction des champs électriques et magnétiques et obtenir un ensemble de quatre équations ne portant que sur deux champs de vecteurs, qu'il devrait être possible de résoudre ensuite.

1.3.2 Considérations énergétiques

Nous terminerons ce chapitre par quelques brèves remarques sur l'énergétique. Il est clair que des densités d'énergie doivent être associées aux densités de polarisation et que le transport de polarisation doit contribuer au transport d'énergie. En fait, les bilans d'énergie dans la matière sont complexes puisqu'ils doivent faire intervenir tout autant les énergies associées aux champs et polarisations que l'énergie de la matière elle-même. Des phénomènes comme l'électrostriction, par exemple, (la matière devient plus dense quand on lui applique un champ magnétique) ne peuvent être correctement compris que dans une approche thermodynamique globale.

Nous ne tenterons pas cette approche ici et nous nous contenterons d'établir, à partir des équations de Maxwell macroscopiques, une équation ayant une forme similaire au bilan d'énergie dans le vide (vecteur de Poynting). Nous postulerons alors l'identification des différents termes de cette équation à une densité d'énergie électromagnétique et à un vecteur décrivant le flux d'énergie.

Nous procéderons en fait comme on le fait pour les équations de Maxwell dans le vide. A partir de Maxwell Ampère, on écrit:

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.57)$$

et on en déduit la densité de puissance cédée par les champs aux courants libres, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ (l'expression de la force de Lorentz s'exerçant sur les porteurs libres fait bien sûr intervenir les champs ordinaires). On a

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (1.58)$$

En remarquant que:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) , \quad (1.59)$$

et en utilisant la première équation de Maxwell, on a:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 . \quad (1.60)$$

Cette équation a exactement la forme de l'équation bilan dans le vide. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ étant la puissance cédée par le champ aux charge libres et donc aussi la puissance cédée par les générateurs au champ, on peut interpréter

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.61)$$

comme le vecteur dont le flux à travers une surface représente le transport d'énergie à travers cette surface. Il s'agit donc du vecteur de Poynting dans la matière. Finalement, le terme

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.62)$$

pourrait être interprété comme la dérivée par rapport au temps de la densité d'énergie électromagnétique. Dans le cas général, sans connaître le lien entre polarisation et champ, on ne peut préciser davantage la densité d'énergie électromagnétique. On peut cependant analyser un peu plus en détail la signification physique des termes, en particulier électriques. Le premier terme peut en effet s'écrire

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (1.63)$$

La première dérivée n'est autre que celle de la densité d'énergie électrostatique ordinaire. Le deuxième terme peut s'écrire:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_\ell . \quad (1.64)$$

si on suppose le matériau dépourvu de propriétés magnétiques et donc le courant lié seulement à la variation temporelle de la polarisation électrique. Il s'agit donc simplement de la puissance

que le champ fournit à la matière pour changer sa polarisation. Ce changement de polarisation s'accompagne effectivement de courants macroscopiques produits par des forces de Lorentz qui travaillent. L'interprétation physique de la partie électrique de cette équation bilan est donc très claire: la variation dans le temps de l'énergie électrique compense la puissance cédée aux courants macroscopiques ou aux courants liés résultant des changements de polarisation.

Chapitre 2

Réponse linéaire

Nous allons pouvoir donner un sens physique aux équations établies dans le chapitre précédent en précisant les relations entre les densités de polarisation et les champs. Il paraît assez naturel que, dans la plupart des milieux, les polarisations électriques ou magnétiques répondent aux champs appliqués. De façon très générale, on doit pouvoir, avec un modèle microscopique du milieu, écrire les densités de polarisation en fonction des champs. Si les champs appliqués ne sont pas trop grand, cette relation est a priori linéaire. Dans la plupart des matériaux, à l'exception notable des ferromagnétiques et des ferroélectriques, les polarisations s'annulent en l'absence de champ. On doit donc pouvoir écrire une relation linéaire homogène entre les polarisations et les champs. Cette relation doit se mettre sous la forme d'un produit de convolution faisant intervenir la fonction de Green du système, ou encore sa réponse percussionnelle. Nous retrouverons donc des points du formalisme assez semblables à ce que nous avons utilisé pour établir l'expression des potentiels retardés dans la troisième partie de ce cours. Plutôt qu'un produit de convolution, nous préférons écrire de simples relations de proportionnalité en introduisant les composantes de Fourier des différentes quantités. Nous définirons alors la notion de susceptibilité. L'ensemble de ces notions fera la matière du premier paragraphe.

Dans le second paragraphe, nous passerons en revue rapidement quelques modèles microscopiques de polarisabilité électrique ou magnétique. C'est en effet par un mécanisme de polarisation, comme celui que nous avons déjà rencontré pour le modèle de Thomson, que chaque molécule acquiert un dipôle sous l'influence du champ appliqué.

Si le milieu était très dilué, il n'y aurait aucun problème pour exprimer la susceptibilité, quantité macroscopique, en fonction de la polarisabilité, quantité microscopique. En fait, les choses ne sont pas aussi simples. Le champ "vu" par chaque molécule est la somme du champ extérieur, macroscopique, et du champ rayonné par les molécules immédiatement voisines. Ce champ étant un champ microscopique, il n'est pas convenablement décrit dans notre formalisme. Nous apprendrons, dans le troisième paragraphe de ce chapitre, comment on peut contourner cette difficulté et exprimer, au moyen d'hypothèses très générales et très bien vérifiées, les champs "locaux" en fonction des champs macroscopiques. Nous pourrons alors écrire simplement les susceptibilités en fonction des polarisabilités et de la densité numérique du milieu.

Avec ces nouveaux outils, nous reviendrons sur les bilans énergétiques dans la matière. Nous montrerons en particulier que la partie imaginaire de la susceptibilité décrit très simplement les échanges d'énergie entre champ et matière. Nous verrons que, dans la plupart des matériaux, la matière absorbe le champ. Nous montrerons que, à certaines conditions, un milieu atomique renforce le champ incident. Nous retrouverons ainsi, de manière très élémentaire, le principe de l'émission stimulée, à la base du fonctionnement des lasers.

Le dernier paragraphe de ce chapitre sera consacré à l'établissement des relations de Kramers–Krönig. Nous verrons que la simple causalité (la polarisation ne peut répondre avant l'application du champ) impose des relations très fortes entre les parties réelles et imaginaires de la susceptibilité, entre dispersion et absorption. Ces relations sont très générales dans la théorie de la réponse linéaire ou des

fonctions de Green et peuvent être appliquées à bien d'autres domaines que l'électromagnétisme dans la matière.

2.1 Susceptibilités

Nous essaierons d'abord d'écrire les relations linéaires les plus générales possibles entre polarisations et champ. Nous commencerons par formuler quelques hypothèses raisonnables. Elles ne sont pas toutes indispensables, mais elles facilitent beaucoup l'algèbre sans beaucoup restreindre la généralité. Nous supposerons donc que:

- \mathbf{P} et \mathbf{j} ne dépendent que de \mathbf{E} . Pour la première hypothèse, nous négligerons les effets magnétiques sur la polarisabilité électrique des molécules. Les vitesses des électrons dans les molécules, principalement responsables de la polarisabilité électrique, sont en effet faibles par rapport à la vitesse de la lumière. L'action des forces magnétiques est donc bien négligeable. Pour la seconde hypothèse, nous l'introduisons pour décrire la conductivité du matériau. Nous nous pencherons surtout sur la propagation d'ondes dans les milieux homogènes, d'où les générateurs sont exclus, et où les charges ne se mettent en mouvement que sous l'action du champ électrique. Là aussi, nous négligerons l'influence des forces magnétiques et des phénomènes tels que la magnétorésistance ou l'effet Hall. Ils ne sont guère observés que dans les semi-conducteurs, et pourront être traités en perturbation par rapport à ce que nous établirons ici.
- \mathcal{M} ne dépend que de \mathbf{B} . Cette hypothèse est symétrique de la précédente.
- les densités de quadripôles sont tout à fait négligeables. Tout milieu présentant au moins une polarisabilité électrique dipolaire induite, cette hypothèse est plus que raisonnable.
- toutes les polarisations s'annulent avec le champ qui en est la cause. On néglige donc les matériaux où apparaissent des polarisations permanentes, ferromagnétiques ou ferroélectriques. Ces matériaux présentant tous de l'hystérésis (l'état dépend de toute l'histoire du matériau), ils ne peuvent être abordés dans un cadre simple.
- la relation entre polarisations et champs est locale. La polarisation ne dépend que du champ, pris à un instant arbitraire, au même endroit. Nous négligerons phénomènes de transport et corrélations diverses.
- la relation est causale. La polarisation ne dépend du champ que dans le passé.

Les relations que nous allons écrire ayant les mêmes formes pour \mathbf{P} , \mathbf{j} et \mathcal{M} , nous ne les écrirons systématiquement que pour \mathbf{P} . Nous voulons une relation linéaire homogène entre \mathbf{P} et \mathbf{E} . Elle peut s'écrire en termes d'une fonction de Green. $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ étant, à des facteurs dimensionnels près, la polarisation créée au point \mathbf{r} par un champ impulsionnel en $t = 0$, on pourra écrire:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \tau) \cdot \mathbf{E}(t - \tau) d\tau . \quad (2.1)$$

Il n'y a aucune raison a priori pour que \mathbf{P} et \mathbf{E} aient la même direction. Un matériau cristallin, par exemple, ne répond pas de manière identique dans les différentes directions propres de sa maille cristalline. La fonction de Green \mathbf{G} est donc a priori un tenseur de rang 2, qui ne se réduira à un scalaire que pour des milieux isotropes. La causalité, pour sa part, implique que \mathbf{G} s'annule pour $\tau < 0$. On vérifiera d'autre part que, avec les normalisations employées, \mathbf{G} a la dimension d'une fréquence (son intégrale sur le temps est sans dimension).

Cette relation de convolution est d'un maniement difficile. On peut la transformer en une simple relation de proportionnalité en introduisant les transformées de Fourier temporelles. En posant

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

et une définition équivalente pour \mathbf{E} , on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int G(\mathbf{r}, \tau) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) e^{i\omega t} dt d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^{3/2}} \int G(\mathbf{r}, \tau) \cdot \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{i(\omega - \omega')t} e^{i\omega' \tau} dt d\tau d\omega' \end{aligned} \quad (2.3)$$

En remarquant alors que:

$$\int dt e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') , \quad (2.4)$$

on a

$$\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \boldsymbol{\chi}^e(\omega, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_\omega , \quad (2.5)$$

où $\boldsymbol{\chi}^e$ est évidemment la transformée de Fourier de la fonction de Green:

$$\boldsymbol{\chi}^e(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{G}(\tau, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt . \quad (2.6)$$

Nous appellerons $\boldsymbol{\chi}^e$ la susceptibilité du matériau. L'exposant e a été ajouté pour distinguer plus tard la susceptibilité électrique de la susceptibilité magnétique. C'est une fonction de la fréquence, qui exprime la relation de proportionnalité entre les composantes de fréquence de \mathbf{P} et de \mathbf{E} . C'est aussi une fonction de la position, si le matériau n'est pas homogène. C'est enfin, comme G , une quantité tensorielle de rang 2, sans dimensions. On notera à ce propos que \mathbf{P}_ω et \mathbf{E}_ω ont la dimension d'une polarisation ou d'un champ électrique multipliés par un temps.

Nous considérerons surtout des milieux isotropes. Nous écrirons donc à partir de maintenant $\boldsymbol{\chi}^e$ comme un simple scalaire χ^e . La plupart de nos raisonnements pourraient être généralisés au cas tensoriel par une simple réécriture. χ^e est a priori une quantité complexe. La polarisation ne répondant pas instantanément au champ, il doit exister un déphasage non nul entre leurs composantes de Fourier. Nous aurons souvent à distinguer les parties réelles et imaginaires et écrirons donc χ^e sous la forme:

$$\chi^e = \chi^{e'} + i\chi^{e''} , \quad (2.7)$$

où $\chi^{e'}$ et $\chi^{e''}$ sont des quantités réelles.

Ce que nous venons de faire pour \mathbf{P} , nous pouvons aussi le faire pour \mathcal{M} et introduire une susceptibilité magnétique χ^m définie par:

$$\mathcal{M}_\omega = \frac{\chi^m(\mathbf{r}, \omega)}{\mu_0} \mathbf{B}_\omega . \quad (2.8)$$

avec ces notations, la susceptibilité magnétique est elle aussi sans dimensions. Enfin, nous pouvons introduire une conductivité à la fréquence ω en posant:

$$\mathbf{j}_\omega = \sigma_\omega(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\omega . \quad (2.9)$$

Notons qu'à la différence des précédentes, cette quantité n'est pas sans dimensions. Pour des raisons principalement historiques, on écrit une conductivité plutôt qu'une susceptibilité à proprement parler. Notons que cette définition peut être associée à l'équation de conservation de la charge écrite en termes des composantes de Fourier:

$$i\omega \rho_\omega = \nabla \cdot \mathbf{j}_\omega . \quad (2.10)$$

Nous pouvons ainsi déterminer aussi la densité de charges libres en fonction du champ électrique.

2.2 Polarisabilité électrique

De manière évidente, si ces relations de susceptibilités existent, c'est que chaque molécule du milieu prend un petit moment dipolaire magnétique sous l'influence du champ magnétique et un petit moment dipolaire électrique sous l'influence du champ électrique. On doit donc pouvoir déduire les susceptibilités d'un modèle microscopique. Nous allons nous employer, dans ce paragraphe et le suivant, à passer rapidement en revue des modèles microscopiques de polarisabilité. Nous attendrons le dernier chapitre de cette partie pour donner un modèle de conductivité, plus phénoménologique que physique. Nous commencerons donc par la polarisabilité électrique. Nous chercherons donc à écrire le dipôle moyen pris par une molécule \mathbf{p}_m sous l'influence d'un champ électrique \mathbf{E}_m sous la forme:

$$\mathbf{p}_m = \epsilon_0 \alpha_m^e \mathbf{E}_m . \quad (2.11)$$

Nous noterons le champ \mathbf{E}_m . Il s'agit en effet du champ microscopique vu par la molécule, non du champ macroscopique qui intervient dans les équations de Maxwell moyennées. Notons aussi qu'il s'agit d'une réponse moyenne. Dans les susceptibilités n'apparaissent que des quantités macroscopiques, moyennées sur un grand nombre de molécules. Nous pourrions par exemple recourir à la thermodynamique pour écrire des moyennes d'ensemble sur un très grand nombre de molécules sous l'action conjointe du champ appliqué et de l'agitation thermique. La polarisabilité peut se présenter sous deux formes: polarisabilité induite ou d'orientation.

2.2.1 Polarisabilité induite

Les atomes ou les molécules plongés dans un champ électrique oscillant acquièrent un moment dipolaire induit. Le modèle le plus simple est donné par le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié, dont nous avons établi la surprenante validité dans le domaine quantique. On se reportera donc à la quatrième partie pour l'expression de la polarisabilité α_i associée.

2.2.2 Polarisabilité d'orientation

En plus de la polarisabilité induite, certaines molécules présentent un moment dipolaire permanent (interdit en revanche pour les atomes). C'est par exemple le cas pour les molécules des solvants polaires comme l'eau, l'ammoniaque ou HCl. En l'absence de champ appliqué, les orientations des dipôles sont aléatoires. En moyenne, il n'existe pas de polarisation ¹. Sous l'influence d'un champ électrique et de la relaxation, les dipôles du milieu vont tendre à s'aligner avec le champ. Il apparaîtra donc un dipôle induit, proportionnel au champ si celui-ci n'est pas trop rapide.

Il est évident que, pour un champ harmonique, le dipôle moléculaire moyen ne pourra pas suivre le champ électrique s'il oscille à trop haute fréquence. Il faut que la période du champ soit plus longue que le temps de relaxation caractéristique du milieu, c'est à dire le temps pour qu'un dipôle, en moyenne revienne à l'équilibre thermodynamique. Ce temps de relaxation est en général très court, de l'ordre du temps entre collisions dans les liquides, donc inférieur à la picoseconde. La polarisation a donc le temps de s'établir dès que la champ a une longueur d'onde supérieure à celles de l'infrarouge proche. On peut alors se contenter d'un modèle statique, que nous allons détailler plus loin. A très haute fréquence, la molécule ne répond pratiquement plus (en moyenne statistique) au champ appliqué et la polarisabilité s'annule. Entre les deux régimes, c'est à dire dans le visible et proche infrarouge, on a une situation plus complexe où le module et la phase de la polarisabilité (qui est évidemment une quantité complexe) évoluent rapidement.

Nous allons maintenant calculer la polarisabilité statique (ou basse fréquence) d'un ensemble de molécules polaires. Nous traiterons le problème sans recourir à la mécanique quantique, ce qui serait

¹Dans les matériaux ferroélectriques, les dipôles sont associés à une déformation permanente de la maille cristalline, et il peut apparaître une polarisation en l'absence de champ appliqué. Nous avons explicitement exclu ce type de matériau de notre étude

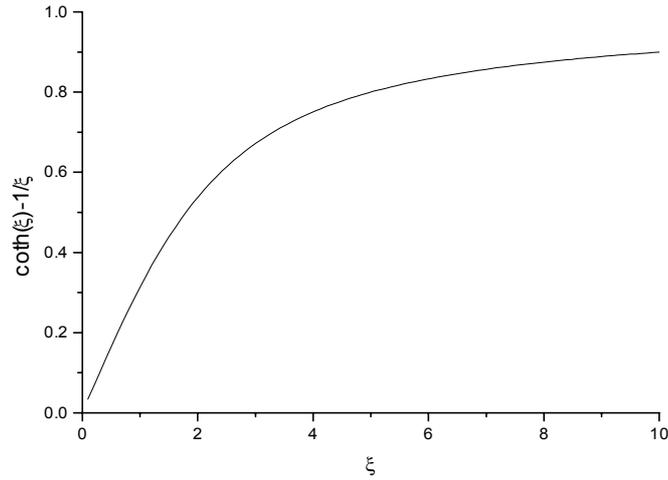


Figure 2.1: Dipôle moyen en fonction du paramètre ξ .

indispensable pour une approche rigoureuse. Le dipôle électrique, en projection sur un axe, est une quantité quantifiée. Nous verrons, pour la polarisation d'orientation magnétique, comment tenir compte en principe de cette quantification. Elle ne modifie pas l'aspect qualitatif des choses et n'altère qu'un facteur numérique proche de l'unité portant sur la polarisabilité. Pour une discussion qualitative, nous pourrions donc nous contenter d'une approche classique.

Il est évident par symétrie que le dipôle est aligné avec le champ, que nous prendrons selon Oz . Si p_0 est le module du dipôle moléculaire permanent, l'énergie d'interaction d'une molécule dont l'axe (et donc le dipôle) font un angle θ avec l'axe Oz est simplement $H = -p_0 E_m \cos \theta$. On peut alors utiliser la statistique de Boltzmann pour calculer la composante selon z du dipôle moyen:

$$\bar{p} = p_0 \int \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \cos \theta , \quad (2.12)$$

avec $\beta = 1/kT$. Z est la fonction de partition. L'intégrale porte sur toutes les configurations possibles, c'est à dire sur tous les angles θ, ϕ des coordonnées sphériques. L'intégration sur ϕ est un simple facteur 2π , absorbé par un facteur identique dans la fonction de partition. On a donc:

$$\bar{p} = p_0 \frac{\int \sin \theta d\theta \cos \theta \exp(p_0 E_m \cos \theta / kT)}{\int \sin \theta d\theta \exp(p_0 E \cos \theta / kT)} . \quad (2.13)$$

Ces intégrales se calculent de façon triviale. En posant

$$\xi = \frac{p_0 E_m}{kT} , \quad (2.14)$$

rapport de l'énergie du dipôle dans le champ à l'énergie thermique moyenne, on trouve:

$$\bar{p} = p_0 \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) . \quad (2.15)$$

La fonction $\coth \xi - \frac{1}{\xi}$ est représentée sur la figure 2.1 La relation que nous obtenons ainsi est non linéaire. Pour des très grands champs, tels que l'énergie du dipôle dans le champ soit beaucoup plus grande que l'énergie thermique, le dipôle moyen sature à une valeur p_0 . En fait toutes les polarisabilités d'orientation présentent cette saturation triviale quand toutes les molécules du milieu sont alignées.

Nous ne trouverons de polarisabilité linéaire qu'en allant dans le domaine des tout petits champs électriques. Si $\xi \ll 1$, nous pouvons en effet faire un développement limité en puissances de ξ . Après quelques manipulations algébriques élémentaires, on trouvera :

$$\bar{p} = p_0 \frac{\xi}{3}, \quad (2.16)$$

et donc une polarisabilité d'orientation :

$$\alpha_o = \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (2.17)$$

homogène à un volume comme il se doit. L'hypothèse de champ faible n'est pas trop contraignante. Si nous prenons un dipôle de l'ordre de 3 debyes, 10^{-29} Cm, dipôle très grand par rapport aux dipôles moléculaires ordinaires, la limite des champs faibles correspond à $E_m \ll 10^9$ V/m. Pour de tels champs, la plupart des matériaux ont déjà donné lieu à un claquage (les rigidités diélectriques typiques des matériaux les plus résistants, comme le Téflon, sont de quelques dizaines de kV/mm, ou 10^7 V/m)!

Comparons, en ordres de grandeur, la polarisabilité d'orientation à la polarisabilité induite du modèle de Thomson. En posant l'ordre de grandeur de $p_0 = a_0 e$ où e est la charge élémentaire et a_0 le rayon de Bohr, on pourra écrire :

$$\alpha_o \simeq \frac{a_0^2 e^2}{3\epsilon_0 kT} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{kT} \frac{8\pi}{3} a_0^3. \quad (2.18)$$

Dans la première fraction du membre de droite, on reconnaît l'énergie de liaison atomique, de l'ordre de la constante de Rydberg R . Le dernier terme est de l'ordre du volume de la molécule, qui est précisément l'ordre de grandeur de la polarisabilité induite α_i dans la limite statique, qui s'applique largement ici. On a donc finalement :

$$\frac{\alpha_o}{\alpha_i} = \frac{R}{kT} \simeq 10^3. \quad (2.19)$$

Pour toute température réaliste, la polarisabilité d'orientation domine largement la polarisabilité induite. Celle-ci ne jouera donc de rôle que pour les molécules non polaires, ou à très haute fréquence. Dans ce cas la polarisabilité d'orientation est pratiquement nulle. La polarisabilité induite, qui met en jeu des constantes de temps atomiques et non des constantes de temps de thermalisation, peut encore être importante.

2.3 Polarisabilités magnétiques

Nous chercherons ici à écrire le moment magnétique moléculaire moyen en fonction du champ appliqué, sous la forme :

$$\mathbf{m} = \frac{\alpha^m}{\mu_0} \mathbf{B}_m. \quad (2.20)$$

Avec ces notations, α^m a bien la dimension d'un volume. Là aussi \mathbf{B}_m est le champ "vu" par la molécule m qu'il nous faudra déterminer en fonction des champs macroscopiques.

2.3.1 Diamagnétisme

Modèle classique

La première source de polarisabilité magnétique est une polarisabilité induite que présentent toutes les molécules ou atomes n'ayant pas de dipôle magnétique permanent. Pour comprendre l'origine de cette polarisabilité, nous considérerons un modèle atomique très simple. Un atome est constitué

de deux électrons orbitant autour du noyau sur une orbite de rayon r , perpendiculaire à l'axe Oz , parcourue en sens inverse par les deux électrons. Si nous ne considérons qu'un électron (atome d'hydrogène), nous aurions un moment magnétique orbital permanent. Avec ce modèle très naïf (il néglige l'interaction coulombienne entre les deux électrons) de l'atome d'hélium, on n'a pas de moment magnétique permanent parce que les moments associés aux deux électrons se compensent exactement.

Appliquons à cet atome un champ magnétique uniforme, statique, \mathbf{B}_m dirigé selon Oz . Ce champ doit croître, lentement à l'échelle des temps atomiques, depuis la valeur nulle. Comme tout champ magnétique variable, il génère un champ électrique. Celui-ci est visiblement, en coordonnées cylindriques, dirigé selon \mathbf{u}_θ : il tourne autour de l'axe. Ce champ électrique va donc ralentir un des électrons et accélérer l'autre. Il va, en un mot, briser la compensation des moments magnétiques orbitaux et faire apparaître un moment magnétique induit ².

Précisons cet argument. Le potentiel vecteur \mathbf{A} s'écrit, toujours en coordonnées cylindriques:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(t)r\mathbf{u}_\theta, \quad (2.21)$$

où $B(t)$ est le module instantané du champ, passant adiabatiquement de 0 à B_m . Le champ électromoteur s'écrit donc:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}\mathbf{u}_\theta. \quad (2.22)$$

En supposant, ce qui est une excellente approximation, que l'orbite des électrons reste invariante et que seul le module de la vitesse de l'électron change, on trouve que cette modification de vitesse est (pour l'électron tournant dans le sens direct autour de \mathbf{B}):

$$\Delta v = -\frac{q}{2m}r \int \frac{dB}{dt}, \quad (2.23)$$

l'intégrale portant sur toute la phase de variation du champ magnétique et q étant la charge (négative) de l'électron. On a donc:

$$\Delta v = -\frac{qB_m}{2m}r, \quad (2.24)$$

indépendamment de la loi de variation de B . Il s'agit donc d'un résultat universel. L'autre électron a évidemment une variation de vitesse opposée. Il en résulte une variation des moments magnétiques associés aux deux électrons et un moment magnétique global:

$$m = -\frac{q^2r^2}{4m}B_m. \quad (2.25)$$

On en déduit la polarisabilité diamagnétique:

$$\alpha_d^m = -\frac{q^2\mu_0}{4m} \sum_i r_i^2, \quad (2.26)$$

où la somme est à étendre à tous les électrons (au moins deux) de l'atome.

Nous avons bien une polarisabilité linéaire. Elle a été calculée ici pour un champ statique. Les constantes de temps de mise à l'équilibre des orbitales atomiques étant dans le domaine optique, cette expression de la polarisabilité diamagnétique doit rester valable jusqu'à des fréquences très élevées. La polarisabilité diamagnétique est négative. Le moment induit est opposé au champ magnétique. Cela implique qu'une telle molécule aura, pour minimiser l'énergie, tendance à fuir les régions de champs forts. C'est effectivement le comportement des substances diamagnétiques, dominées par ce type de polarisabilité.

²La variation de vitesse des électrons lors du branchement du champ magnétique est souvent appelée "effet bétatron" en référence à l'un des premiers accélérateurs de particules. On utilisait un champ magnétique croissant pour accélérer des électrons orbitant dans ce champ. L'énergie finale étant limitée par le champ maximal, les performances étaient plus que limitées et le principe fut rapidement abandonné

Modèle quantique

Le modèle très naïf du paragraphe précédent ne peut nous satisfaire. Pour essayer de préciser les choses, nous allons nous pencher sur un atome à un électron plongé dans un champ magnétique. Nous essaierons de calculer le dipôle magnétique induit.

Le hamiltonien de l'atome dans le champ est, comme nous l'avons déjà vu dans la partie précédente:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2}{2m} + V(\mathbf{R}) , \quad (2.27)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{R} sont les opérateurs position et impulsion, et \mathbf{A} le potentiel vecteur, dépendant de \mathbf{R} . V est simplement le potentiel coulombien. Le moment magnétique peut s'écrire:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2}\mathbf{R} \times \mathbf{v} , \quad (2.28)$$

où \mathbf{v} est l'opérateur vitesse, qui s'écrit, comme en mécanique analytique classique:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P} - q\mathbf{A}}{m} . \quad (2.29)$$

En notant que $\mathbf{R} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}$ est le moment cinétique, on a donc:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} [\mathbf{L} - q\mathbf{R} \times \mathbf{A}] . \quad (2.30)$$

Evaluons la valeur moyenne de cet opérateur dans l'état fondamental $|1S\rangle$ du hamiltonien libre ($\mathbf{L} = 0$). C'est bien sûr une valeur moyenne quantique qu'il faudra injecter dans nos équations de Maxwell macroscopiques. Cet état est sans moment angulaire moyen et donc sans dipôle magnétique permanent (ce qui ne serait pas le cas d'un niveau P , par exemple). Il ne reste donc que la moyenne du terme en \mathbf{A} . En utilisant une des expressions possibles du potentiel vecteur d'un champ uniforme ($\frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{R}$ et en notant que le champ magnétique, uniforme, n'est pas un opérateur, nous trouverons:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = -\frac{q^2}{4m} \langle 1S | r^2 \mathbf{B} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{R} | 1S \rangle . \quad (2.31)$$

\mathbf{B} étant aligné avec Oz , cette expression se transforme instantanément en remarquant que $\langle 1S | ZX | 1S \rangle = \langle 1S | ZY | 1S \rangle = 0$:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = -\frac{q^2 B}{4m} \langle 1S | X^2 + Y^2 | 1S \rangle . \quad (2.32)$$

On retrouve donc exactement, de manière assez surprenante, l'expression résultant du modèle naïf, où il suffit de remplacer r^2 par la valeur moyenne de $X^2 + Y^2$. Encore une fois, les modèles les plus simples se trouvent confirmés par une approche complètement quantique.

2.3.2 Paramagnétisme

Considérons maintenant le cas d'atomes ou de molécules portant un dipôle magnétique permanent (si des considérations d'invariance par renversement du sens du temps empêchent les atomes de posséder un moment dipolaire électrique permanent, ils peuvent porter un moment magnétique). Les molécules ayant un tel moment dipolaire, appelées paramagnétiques, ont en général un électron solitaire, non apparié sur son orbitale. C'est par exemple le cas de l'oxygène moléculaire, qui, sous sa forme liquide, est fortement attiré vers les zones de champs magnétiques forts. Comme pour les dipôles électriques, il doit exister une polarisabilité magnétique, positive, résultant de la compétition entre l'alignement des dipôles dans le champ magnétique et l'agitation thermique.

Si nous considérons le dipôle magnétique comme une quantité classique dont la projection sur un axe n'est pas quantifiée, nous pouvons traiter le problème par la statistique classique. La démarche est

absolument identique à celle utilisée pour la polarisabilité électrique d'orientation et nous ne donnons que le résultat final. En posant:

$$\xi = \frac{m_0 B_m}{kT} , \quad (2.33)$$

où m_0 est le module du dipôle moléculaire, on obtient:

$$\bar{m} = m_0 \left[\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right] , \quad (2.34)$$

dont le développement pour des champs magnétiques faibles donne une polarisabilité d'orientation:

$$\alpha_o^m = \frac{\mu_0 m_0^2}{3kT} . \quad (2.35)$$

Comme il se devait, nous trouvons une polarisabilité positive. L'approximation de champs faibles est bien vérifiée pour tous les champs expérimentalement possibles et des températures voisines de l'ambiante. En effet, l'amplitude typique des dipôles magnétiques électroniques est le magnéton de Bohr, 14 GHz par Tesla en unités de fréquence (on exprime un moment magnétique en unités de fréquence en écrivant $mB = h\nu$). Une énergie thermique correspond, en fréquence, à une trentaine de THz. Les énergies magnétiques sont donc bien négligeables par rapport à l'agitation thermique. Notons que le magnétisme nucléaire, dû à l'orientation des moments magnétiques des noyaux, est encore plus faible, le moment magnétique d'un noyau étant typiquement 2000 fois plus faible que celui d'un électron. Bien sûr, ces ordres de grandeur ne tiennent que si on néglige les interactions entre moments magnétiques voisins par rapport au champ extérieur. En fait, dans les matériaux ferromagnétiques, une interaction d'origine purement quantique entre moments voisins peut, à une température suffisamment basse, aligner tous les spins du milieu et créer une aimantation intense. Là encore, nous ne nous préoccupons pas de ce type de substance.

Comparons à ce point les ordres de grandeur des polarisabilités paramagnétiques et diamagnétiques, α_o et α_d . On a:

$$\frac{\alpha_o}{\alpha_d} = \frac{\mu_0 m_0^2 / 3kT}{q^2 a_0^2 \mu_0 / 4m} . \quad (2.36)$$

En remarquant que l'ordre de grandeur du moment magnétique permanent est

$$m_0 \simeq qc\alpha a_0 , \quad (2.37)$$

puisqu'il correspond à un électron sur une orbite de taille a_0 parcourue à la vitesse $c\alpha$, où α est encore une fois la constante de structure fine. On a donc finalement:

$$\frac{\alpha_o}{\alpha_d} \simeq \frac{c^2 \alpha^2 m}{kT} \simeq \frac{R}{kT} . \quad (2.38)$$

Comme dans le cas électrique, le rapport des polarisabilités d'orientation et induite est de l'ordre de l'énergie de liaison atomique divisée par l'énergie thermique. On comprend donc bien que les susceptibilités paramagnétiques soient typiquement mille fois plus grandes que les susceptibilités diamagnétiques.

Cette approche classique, comme pour le dipôle électrique, est a priori insuffisante. En effet, le moment magnétique est, en mécanique quantique, à l'instar de toutes les observables vectorielles, proportionnel au moment cinétique. Sa projection sur l'axe Oz est donc quantifiée. Pour simplifier le calcul, nous supposons que le moment angulaire de notre atome est de $\frac{1}{2}$. L'énergie d'interaction magnétique ne peut alors prendre que deux valeurs, $\omega_m I_z$, où $I_z = \pm \hbar/2$ est la projection sur z du moment cinétique atomique et $\omega_m = gB_m$ est la fréquence de Larmor, g étant le coefficient de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique, appelé rapport gyromagnétique.

Comme seulement deux niveaux d'énergie sont accessibles, on peut écrire explicitement les probabilités d'occupation de ces niveaux:

$$n_{\pm} = \frac{\exp(\pm \hbar \omega_m / 2kT)}{2 \cosh \hbar \omega_m / 2kT} . \quad (2.39)$$

L'aimantation moyenne est donnée simplement par $\bar{m} = (n_+ - n_-)g\hbar/2$. On trouve donc:

$$\bar{m} = \frac{g\hbar}{2} \tanh \frac{\hbar \omega_m}{2kT} . \quad (2.40)$$

En développant cette expression pour des champs magnétiques faibles, on trouve la polarisabilité quantique d'orientation:

$$\alpha_{o,q}^m = \frac{\mu_0 \hbar^2 g^2}{4kT} . \quad (2.41)$$

A la définition près de la valeur du moment magnétique ($m_0 = g\hbar/2$), cette expression ne diffère du résultat classique que par un préfacteur numérique proche de l'unité. L'essentiel de la physique est donc contenu dans l'expression classique. Nous laissons au lecteur le soin d'établir l'expression de la polarisabilité pour un spin quelconque. Comme l'indique le principe de correspondance, on retrouvera l'expression classique dans la limite des très grands spins.

Notons encore une fois que nous n'avons établi que les expressions statiques des polarisabilités. Elles sont cependant valables tant que la période des champs est longue par rapport aux constantes de temps d'atteinte de l'équilibre thermodynamique.

2.4 Lien entre polarisabilité et susceptibilité

Nous savons maintenant exprimer la polarisation des molécules en fonction du champ "perçu" par chaque molécule, \mathbf{E}_m ou \mathbf{B}_m . Si le milieu était très peu dense, l'influence des molécules voisines serait négligeable et le champ vu par la molécule serait sensiblement identique au champ macroscopique. La polarisation par unité de volume serait alors simplement le produit du moment dipolaire de chaque molécule par la densité numérique de molécules (nombre de molécules par unité de volume). On aurait, pour la polarisation électrique, $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_m = N\epsilon_0\alpha^e\mathbf{E}_m$. La susceptibilité serait alors simplement:

$$\chi^e = N\alpha^e , \quad (2.42)$$

manifestement sans dimension. Toutes les quantités écrites ci dessus se réfèrent bien sûr à des composantes monochromatiques. Pour alléger les écritures, nous négligerons souvent d'écrire explicitement les indices ω .

Si le calcul qui précède est correct pour des matériaux très dilués (les gaz par exemple), il ne s'applique pas dans la matière dense. En effet, dans ce cas, la molécule "voit" un champ qui est la somme d'une composante moyenne, proche du champ macroscopique, et du champ des molécules les plus proches. Ce champ est un champ microscopique, qu'il nous faudra représenter correctement pour obtenir la susceptibilité. Nous allons en fait, dans les deux prochains paragraphes, nous employer à montrer qu'il existe une relation linéaire entre le champ "vu" par la molécule et le champ macroscopique. Munis de cette relation, nous pourrions alors évaluer les susceptibilités en fonction des polarisabilités. Les cas électriques et magnétiques étant légèrement différents, nous les traiterons séparément.

2.4.1 Cas électrique

Le problème est donc de déterminer le champ "vrai", microscopique, "vu" par la particule m . Il s'agit d'un champ local, calculé au point précis où se trouve cette molécule, \mathbf{r}_m . Ce champ doit inclure le champ des sources macroscopiques et aussi le champ créé par toutes les particules du milieu

à l'exception toutefois de la particule m elle-même, qui ne peut contribuer à sa propre polarisation. Nous voyons poindre ici une différence importante avec le champ macroscopique, qui inclut les contributions de toutes les molécules y compris m et qui doit être évalué à un point quelconque du milieu.

Dans le champ \mathbf{E}_m , on peut distinguer deux types de contributions. D'abord celles des particules "lointaines", situées à une distance au moins de s_0 , et ensuite la contribution des molécules "proches". Pour distinguer clairement entre ces deux contributions, nous isolerons les particules contenues dans une sphère de rayon voisin de s_0 centrée sur la molécule m . Il nous faut choisir une sphère pour respecter l'isotropie du système. Nous écrirons alors:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_f , \quad (2.43)$$

où l'indice n désigne la contribution des molécules proches et l'indice f celle des particules lointaines et des sources macroscopiques.

La contribution \mathbf{E}_f des sources lointaines ne pose aucun problème. Elle est essentiellement constante sur l'ensemble du volume de la sphère. Pour calculer la contribution \mathbf{E}_n , nous pouvons d'abord négliger les phénomènes de propagation et raisonner comme en électrostatique. Nous sommes en effet, comme s_0 est beaucoup plus petit que la longueur d'onde (nous ne nous préoccupons bien sûr que d'une composante de fréquence), dans le domaine des champs proches, où le champ du dipôle est essentiellement le champ électrostatique. Bien sûr, la propagation devra être incluse soigneusement dans la contribution des molécules lointaines. \mathbf{E}_n est donc la somme de tous les champs de tous les dipôles moléculaires autre que m . L'échelle s_0 étant très grande par rapport aux distances interatomiques, nous avons un très grand nombre de particules dans notre sphère. Nous ne ferons pas une trop grande erreur en calculant le champ \mathbf{E}_n comme si toutes les molécules dans la sphère avaient toutes le même dipôle, égal au dipôle moyen à cet endroit, égal donc au dipôle que prendra la molécule m dans le champ total. L'opération rigoureuse serait de prendre les dipôles individuels et de moyennner les champs produits. Nous préférons ici prendre le dipôle moyen et évaluer le champ produit.

Nous noterons donc $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho})$ le champ produit au point \mathbf{r}_m par un dipôle moyen situé au point $\mathbf{r}_m + \boldsymbol{\rho}$ (il est évident que ce champ ne dépend que de la distance relative de notre dipôle source et de la molécule de référence). Nous pouvons, en nous fondant sur le très grand nombre de particules dans la sphère, calculer le champ \mathbf{E}_n par un argument statistique: c'est essentiellement l'intégrale sur la sphère du champ produit par une particule en $\boldsymbol{\rho}$ pondéré par la densité de probabilité $\mathcal{P}_c(\boldsymbol{\rho})$ de trouver une particule en ce point:

$$\mathbf{E}_n = \int \mathcal{P}_c(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \boldsymbol{\rho} . \quad (2.44)$$

On prendra garde, dans cette expression, à ce que \mathcal{P}_c est la densité de probabilité *conditionnelle* de trouver une particule à la position $\boldsymbol{\rho}$ par rapport au centre de la sphère en *sachant qu'il y a une molécule au centre de la sphère (m)*. Cette probabilité est manifestement différente de celle de trouver une particule en un point quelconque de l'espace. Il est en particulier évident que \mathcal{P}_c sera nulle si la distance ρ est plus petite que la "taille" des molécules. Finalement, le champ "vu" par la molécule m s'écrira:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_f + \int \mathcal{P}_c(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \boldsymbol{\rho} . \quad (2.45)$$

Nous pouvons tenir le même genre de raisonnement pour réévaluer le champ macroscopique. On distinguera aussi, pour le champ créé dans la sphère, la contribution des molécules lointaines et des molécules proches. La contribution lointaine, \mathbf{E}_f , est manifestement la même qu'auparavant. La différence essentielle est que nous devons estimer ce champ à un point arbitraire dans la sphère. La contribution des molécules proches peut dans ce cas s'écrire:

$$\int \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \boldsymbol{\rho} , \quad (2.46)$$

en faisant intervenir cette fois la densité de probabilité \mathcal{P} de trouver une molécule en un point arbitraire de la sphère (essentiellement la densité numérique pour un matériau homogène). En d'autres termes, pour estimer le champ vu par la molécule m , il nous faut exclure le champ de cette molécule elle-même, ce qui revient à ne considérer que la densité de probabilité conditionnelle, qui exclut explicitement le fait qu'une autre molécule puisse se trouver au centre de la sphère. Pour le champ ordinaire, on prend toutes les molécules, y compris m , et on n'exclut pas la probabilité qu'une molécule se trouve au point d'observation. On aura donc:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \int \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \boldsymbol{\rho} . \quad (2.47)$$

En rapprochant les équations (2.45) et (2.47), nous voyons qu'on peut écrire le champ "vu" par la molécule en fonction du champ macroscopique et d'une différence d'intégrales qui reste à évaluer:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \int (\mathcal{P}_c(\boldsymbol{\rho}) - \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho})) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \boldsymbol{\rho} . \quad (2.48)$$

Evaluons d'abord l'intégrale sur \mathcal{P} . Pour un milieu isotrope, homogène à l'échelle macroscopique, \mathcal{P} est à peu près uniforme et égale à la densité numérique N du milieu. L'intégrale de cette quantité est donc essentiellement le champ électrique créé par une sphère uniformément polarisée, avec une polarisation précisément égale à la polarisation macroscopique \mathbf{P} (puisque chaque molécule de la sphère a le dipôle moyen). Le calcul de ce champ est un exercice d'électrostatique classique. On peut par exemple modéliser la situation par deux sphères uniformément chargées en volume, décalées spatialement d'une quantité très petite par rapport à leur rayon. On trouve alors que le champ intérieur est uniforme, avec une valeur

$$-\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} . \quad (2.49)$$

Examinons maintenant l'intégrale sur \mathcal{P}_c . Considérons d'abord le cas d'un milieu dense et désordonné comme un liquide. \mathcal{P}_c doit alors avoir une symétrie sphérique par rapport à l'origine. Elle est certainement nulle à l'origine (les molécules ne peuvent s'interpénétrer). Elle doit ensuite croître et atteindre un maximum pour des distances de l'ordre de la distance intermoléculaire moyenne. On est en gros sûr de trouver une molécule à une distance moyenne d'une molécule donnée. Le comportement ensuite peut être complexe, mais, dans tous les cas, la probabilité conditionnelle tend rapidement vers la densité numérique. Au bout de quelques distances moyennes, les corrélations de position s'effacent dans les liquides et la probabilité conditionnelle tend vers la probabilité simple. L'intégrale sur \mathcal{P}_c est donc essentiellement le champ créé en son centre par une distribution de polarisation à symétrie sphérique, pratiquement uniforme sauf un "trou" au voisinage du centre. Une application élémentaire du principe de superposition implique que ce champ est la somme des champs de deux sphères concentriques de polarisation opposées. Il est donc tout simplement nul.

Examinons maintenant le cas d'une structure cristalline. Considérons une structure cubique. Pour calculer le champ des plus proches voisins, nous avons à sommer 6 champs de dipôles, tous identiques, situés en $\pm a$ sur chacun des axes, a étant la maille cristalline. Supposons, pour simplifier, que tous les dipôles soient alignés avec Oz . Les quatre dipôles sur Ox et Oy contribuent à un champ antiparallèle à Oz , de module moitié et de direction opposée au champ produit par les dipôles selon Oz . Le champ résultant est donc strictement nul. En fait, pour toutes orientations des dipôles et toute structure cristalline, le champ résultant de l'intégrale sur \mathcal{P}_c sera nul. On a donc, finalement:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} . \quad (2.50)$$

Le dipôle moyen sera donc:

$$\mathbf{p}_m = \epsilon_0 \alpha^e \mathbf{E}_m . \quad (2.51)$$

La densité macroscopique de polarisation s'écrit:

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p}_m = \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E} . \quad (2.52)$$

En rapprochant ces équations, on trouve enfin l'expression de la susceptibilité en fonction des polarisabilités:

$$\chi^e = \frac{N\alpha^e}{1 - N\alpha^e/3}, \quad (2.53)$$

expression valable quelle que soit la nature physique de la polarisabilité. Ce calcul a été établi pour la première fois en électrostatique par Clausius et Mosotti, et repris en régime quelconque, indépendamment, par Lorentz et Lorenz.

Pour des densités très faibles, on peut négliger le terme correctif au dénominateur et on trouve bien une susceptibilité $N\alpha$. En revanche, pour des milieux denses et des polarisabilités élevées, le terme correctif augmente la susceptibilité par rapport à l'extrapolation de celle d'un milieu dilué. Le champ créé par les molécules polarisées par le champ tend à renforcer cette polarisation. On peut estimer l'ordre de grandeur de cet effet. Les polarisabilités moyennes sont de l'ordre de a_0^3 (au voisinage des basses fréquences), les densités de quelques dixièmes de molécule par a_0^3 dans les milieux les plus denses. Le terme correctif est donc au plus de quelques dizaines de pour cent.

A priori toutefois, rien n'empêche qu'un milieu atteigne une densité telle que $N\alpha = 3$. La susceptibilité devrait alors diverger, les molécules s'orientant toutes seules sous l'influence de leur propre champ. Les matériaux ferroélectriques présentent ce genre de comportement, mais uniquement à fréquence nulle. On ne connaît aucun matériau qui puisse acquérir spontanément une polarisation alternative (hélas). On pourrait imaginer remplir ces conditions, par exemple, en partant d'un gaz peu dense et en l'examinant au voisinage d'une fréquence de résonance, par exemple de la vapeur de sodium sur la raie jaune. La polarisabilité d'un atome isolé est très grande, et on atteindrait facilement le seuil fatidique. En fait, ce type de raisonnement pêche en utilisant la polarisabilité d'un atome isolé. Quand la densité est grande, les atomes voisins se perturbent, par des interactions de van der Waals, par exemple, et leur polarisabilité diminue (une façon de le voir est que la largeur des raies atomiques augmente et que donc leur facteur de qualité diminue). En fait, la polarisabilité s'effondre très vite avec la densité et les facteurs correctifs ne dépassent jamais quelques dizaines de pour cent.

2.4.2 Cas magnétique

Il nous reste à traiter le cas magnétique. Le calcul est essentiellement le même, fondé sur la même comptabilité statistique des champs proches et lointains. On trouvera sans peine:

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B} + \int (\mathcal{P}_c(\boldsymbol{\rho}) - \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}))\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\rho}) d^3\boldsymbol{\rho}, \quad (2.54)$$

où les densités de probabilité ont les mêmes significations et où $\boldsymbol{\beta}$ est le champ magnétique créé à l'origine par le dipôle moyen situé en $\boldsymbol{\rho}$. On montrerait, comme précédemment que l'intégrale sur \mathcal{P}_c est identiquement nulle (les géométries des cartes de champ du dipôle magnétique et du dipôle électrique sont identiques). Il ne nous reste donc qu'à évaluer le champ magnétique créé en son centre par une sphère uniformément magnétisée. Le calcul étant moins standard que pour le cas électrique, nous allons le traiter explicitement. Les équations de Maxwell macroscopiques dans la sphère s'écrivent:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (2.56)$$

puisque'il n'y a pas de courants libres. Il existe donc, dans ce cas, un potentiel magnétique scalaire Φ d'où dérive l'induction magnétique:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi. \quad (2.57)$$

Notons que ce potentiel scalaire magnétique n'existe que quand les courants macroscopiques sont nuls. Il ne permet de traiter que les matériaux aimantés, mais il est fort utile dans ce cas. Nous retrouvons

d'ailleurs ici la théorie des masses magnétiques, qui fut très utilisée au XIX siècle pour traiter des aimants. La nullité de la divergence de \mathbf{B} implique que :

$$\nabla \cdot \mathbf{H} + \mathcal{M} = 0 , \quad (2.58)$$

où \mathcal{M} est l'aimantation. Le potentiel scalaire magnétique obéit donc à une équation de Poisson qui s'écrit :

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \mathcal{M} \quad (2.59)$$

Dans le cas de la sphère polarisée électriquement, la densité de charges liées est $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ et le potentiel scalaire obéit à l'équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} . \quad (2.60)$$

La similitude (à des facteurs dimensionnels près) des deux équations prouve que l'induction magnétique \mathbf{H} a essentiellement la même forme que le champ électrique de la sphère polarisée :

$$\mathbf{H} = -\mathcal{M}/3 , \quad (2.61)$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{2}{3} \mathcal{M} . \quad (2.62)$$

En injectant ce résultat dans le calcul du champ vu par la molécule, nous avons :

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B} - \mu_0 \frac{2}{3} \mathcal{M} . \quad (2.63)$$

Le dipôle moyen induit est :

$$\mathbf{m}_m = \frac{1}{\mu_0} \alpha^m \mathbf{B}_m , \quad (2.64)$$

et l'aimantation moyenne est simplement :

$$\mathcal{M} = N \mathbf{m}_m . \quad (2.65)$$

En rapprochant l'ensemble de ces résultats, on détermine la susceptibilité magnétique :

$$\chi^m = \frac{N \alpha^m}{1 + 2N \alpha^m / 3} . \quad (2.66)$$

Pour la limite des faibles densités, on retrouve bien une susceptibilité qui est le produit de la polarisabilité par la densité numérique. Pour des densités plus fortes, le facteur correctif joue un rôle. Pour les substances paramagnétiques, la polarisabilité est positive. Le facteur correctif tend donc à réduire la susceptibilité. En fait, le champ des plus proches voisins est un champ démagnétisant, qui tend à s'opposer au champ macroscopique. La susceptibilité ne pose donc aucun problème de divergence. Pour des substances diamagnétiques, la polarisabilité est négative, et la susceptibilité se trouve renforcée. Toutefois, ces polarisabilités diamagnétiques sont en général très faibles et aucun effet de divergence n'est à craindre. Armés d'expressions réalistes pour les susceptibilités, nous pouvons maintenant les utiliser dans les équations de Maxwell macroscopiques.

2.5 Perméabilité et permittivité relatives

2.5.1 Définitions et équations de Maxwell

Nous avons donc:

$$\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0(1 + \chi^e)\mathbf{E}_\omega . \quad (2.67)$$

Nous ne manipulons forcément que des composantes monochromatiques, puisque les susceptibilités dépendent de la fréquence. Il est naturel de poser:

$$\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi^e . \quad (2.68)$$

Nous nommerons cette quantité “permittivité diélectrique relative”. On a donc

$$\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}_\omega \quad (2.69)$$

Notons que ϵ_r s'exprime facilement en fonction de la polarisabilité:

$$\epsilon_r = \frac{1 + 2N\alpha^e/3}{1 - N\alpha^e/3} . \quad (2.70)$$

Comme la polarisabilité électrique, induite ou d'orientation, est toujours positive à basse fréquence, la permittivité diélectrique relative est toujours supérieure à 1. En revanche, au dessus de la fréquence de résonance des système atomiques, la polarisabilité peut devenir négative et ϵ_r plus petit que 1. Notons que la relation précédente s'inverse facilement en:

$$N\alpha^e = 3\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} . \quad (2.71)$$

Cette relation, en électrostatique, est connue sous le nom de relation de Clausius–Mosotti.

Nous pouvons utiliser le même genre d'arguments pour les phénomènes magnétiques. On peut écrire:

$$\mathbf{B}_\omega = \mu_0\mu_r(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{H}_\omega , \quad (2.72)$$

avec

$$\mu_r = \frac{1}{1 - \chi^m} , \quad (2.73)$$

que nous appellerons “perméabilité magnétique relative”. Là encore, il ne s'agit que de relations entre composantes de Fourier. μ_r est donc supérieur à un pour les matériaux paramagnétiques, de polarisabilité ou de susceptibilité positive, inférieur à un pour les matériaux diamagnétiques. On peut aussi écrire μ_r en fonction de la polarisabilité sous la forme:

$$\mu_r = \frac{1 + 2N\alpha^m/3}{1 - N\alpha^m/3} , \quad (2.74)$$

équation strictement identique à celle que nous avons écrite pour ϵ_r . La relation inverse est aussi identique à la relation de Clausius–Mosotti électrique:

$$N\alpha^m = 3\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} . \quad (2.75)$$

Nous n'avons ici que des relations entre composantes de Fourier. Dans le cas général, les équations de Maxwell ne prennent une forme simple qu'après une transformée de Fourier temporelle. \mathbf{D} et \mathbf{H} s'exprimant en fonction des champs électriques et magnétiques, on obtient un ensemble de quatre équations portant sur deux champs de vecteurs seulement qu'il est, au moins en principe, possible de résoudre. Dans le cas particulier important où les susceptibilités sont pratiquement indépendantes de

la fréquence dans tout le domaine de fréquence couvert par la physique du problème, il est possible de regrouper les composantes de Fourier et d'écrire les équations de Maxwell comme:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.77)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = \rho / \epsilon_0 \quad (2.78)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} / \mu_r) = \mu_0 \left[\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \epsilon_r \mathbf{E}}{\partial t} \right]. \quad (2.79)$$

Nous avons bien pris garde de ne pas sortir les permittivités et perméabilités relatives des dérivations. Elles peuvent en effet a priori dépendre de l'espace, si le matériau n'est pas homogène, et du temps. Ce n'est que dans un matériau homogène et invariable qu'on retrouve une forme identique à celle des équations de Maxwell dans le vide, avec les simples substitutions $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ et $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$.

2.5.2 Considérations énergétiques

Nous pouvons maintenant reprendre l'équation bilan énergétique. Nous nous restreindrons à un milieu dont les susceptibilités sont indépendantes du temps. Le terme de variation d'énergie électromagnétique peut s'écrire:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.80)$$

à condition de poser:

$$u = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r}. \quad (2.81)$$

De son côté, le vecteur de Poynting s'écrit:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}. \quad (2.82)$$

on retrouve donc strictement les bilans énergétiques de l'espace libre, avec les substitutions $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ et $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la puissance cédée par les champs à la matière pour faire varier sa polarisation s'exprimait comme:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (2.83)$$

Bien sûr, il y a aussi une puissance fournie pour modifier les polarisations magnétiques. Toutefois, la plupart des matériaux avec des propriétés magnétiques marquées sont opaques et ne présentent guère d'intérêt du point de vue de la propagation. Nous ne considérerons donc plus qu'un matériau dit diélectrique, équivalent au vide du point de vue magnétique ($\mu_r = 1$) et ne présentant que des propriétés électriques. Si nous ne considérons qu'un champ monochromatique, avec des amplitudes \mathbf{E}_0 et \mathbf{P}_0 pour le champ électrique et la polarisation, la valeur moyenne temporelle de cette puissance s'écrira:

$$\frac{1}{2} \text{Re}(-i\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*). \quad (2.84)$$

En utilisant la susceptibilité $\chi = \chi' + i\chi''$ (on omettra la mention e . Nous ne discutons que du cas électrique et il n'y a pas de risque de confusion avec une susceptibilité magnétique), on met cette puissance sous la forme:

$$\frac{1}{2} |E_0|^2 \epsilon_0 \omega \chi''. \quad (2.85)$$

La puissance moyenne cédée par le champ à la matière est donc proportionnelle à la partie imaginaire de la susceptibilité. Cette puissance reflète bien sûr l'absorption d'une onde électromagnétique par la matière. Si χ'' est positif, le transfert d'énergie se produit du champ vers la matière: cette puissance reflète bien sûr l'absorption d'une onde électromagnétique par la matière. Si χ'' , en revanche, est négatif, la matière fournit de l'énergie à l'onde. On peut alors s'attendre à ce qu'une onde électromagnétique soit amplifiée par un tel milieu. On se convaincra aisément que la susceptibilité résultant du modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié a une partie imaginaire positive. Ce modèle correspond toujours à une absorption, l'énergie fournie par l'onde servant à compenser l'énergie dissipée par le frottement phénoménologique introduit dans l'équation du mouvement de l'électron.

Le modèle quantique, pour sa part, permet une situation un peu plus riche. Si nous prenons le modèle quantique tel que nous l'avons formulé dans la partie précédente, la polarisabilité est strictement réelle, et aucune absorption ne peut se produire. Nous avons en effet un modèle qui néglige complètement la dissipation atomique. Nous pouvons facilement rendre le modèle plus réaliste en rajoutant phénoménologiquement un terme d'amortissement dans l'expression de la polarisabilité ou de la susceptibilité. Pour un milieu suffisamment dilué pour que les facteurs correctifs des équations de Clausius–Mosotti soient négligeables, la susceptibilité s'écrira donc:

$$\chi = \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_{jg}}{\omega_{jg}^2 - \omega^2 - i\gamma_{jg}\omega}, \quad (2.86)$$

où la somme est à étendre à tous les niveaux j autres que le fondamental, f_{jg} étant la force d'oscillateur de la transition de g vers j et finalement γ_{jg} un facteur d'amortissement phénoménologique pour cette transition (on trouve ce facteur de façon exacte en quantifiant le champ et en tenant compte correctement de l'émission spontanée). On peut donc extraire facilement la partie imaginaire de la susceptibilité. Au voisinage immédiat de la résonance, le domaine dans lequel il peut se passer des choses intéressantes, on a:

$$\chi'' = \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{\gamma_{jg}}{\omega} \frac{f_{jg}}{4(\omega_{jg} - \omega)^2 + \gamma_{jg}^2}. \quad (2.87)$$

On trouve donc qu'au voisinage d'une résonance, la partie imaginaire de χ et donc l'échange d'énergie avec le champ présente un comportement Lorentzien. De plus, toutes les quantités étant positives à part la force d'oscillateur, χ'' a le signe de f_{jg} . Celui-ci est le signe de la fréquence de Bohr ω_{jg} de la transition résonante. Rappelons que, dans le calcul quantique de la susceptibilité, nous avons supposé que pratiquement toute la population atomique est dans le niveau g . Si donc le niveau j a une énergie supérieure au niveau g , χ'' est positif et le milieu absorbe l'énergie du champ comme dans le modèle classique de Thomson. En revanche, si le niveau j se trouve énergétiquement au dessous du niveau le plus peuplé, g , la partie imaginaire de la susceptibilité devient négative. Dans ce cas, le milieu atomique fournit de l'énergie au champ et l'amplifie.

Nous trouvons ici en fait une version semi-classique de l'émission stimulée: sur une transition inversée, où la population du niveau supérieur est plus grande que la population du niveau du bas, les photons émis par les atomes sous l'influence d'une onde incidente, s'ajoutent de façon cohérente à l'onde incidente et l'amplifient. Un tel milieu amplificateur couplé à un résonateur peut conduire à une oscillation permanente. En un mot, nous venons d'inventer le laser! On peut comprendre assez bien le fonctionnement d'un laser en remplissant un interféromètre de Fabry Perot avec un milieu amplificateur. Dans un Fabry Perot ordinaire, la finesse finie est due aux pertes subies par le faisceau lumineux sur un aller et retour dans la cavité. Si le gain du milieu amplificateur est juste égal aux pertes, la finesse diverge et il peut exister un champ permanent dans la cavité. Si le gain est supérieur aux pertes, l'intensité croît exponentiellement. En fait, elle ne croît ainsi que sur une gamme limitée. La saturation de la transition atomique, que nous avons brièvement évoquée dans la partie précédente, fait que le gain est en fait une fonction décroissante de l'intensité. Il s'établit alors un régime stationnaire avec une intensité importante dans la cavité.

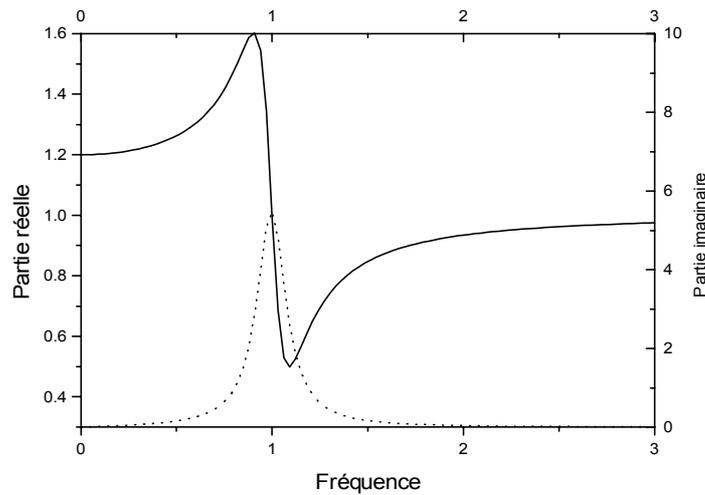


Figure 2.2: Partie réelle et imaginaire de la susceptibilité au voisinage de la résonance. On a représenté en traits pleins la courbe de dispersion $\text{Re}(1 + \chi)$ et en pointillés la courbe d'absorption $\text{Im} \chi$. La fréquence est en unités de la fréquence de résonance. Le facteur de qualité de la résonance est de 30, très inférieur à ce qu'on a pour une résonance atomique.

Nous montrerons dans un paragraphe suivant que la partie réelle de la susceptibilité est, pour sa part, liée à l'indice de réfraction ordinaire. La susceptibilité contient donc tout à la fois les phénomènes de réfraction ou de dispersion, si l'indice n'est pas indépendant de la fréquence, et les phénomènes d'absorption. On vérifiera sans peine que la partie réelle de la susceptibilité présente, voisinage d'une résonance atomique, une forme voisine de la dérivée d'une Lorentzienne. Elle est nulle strictement à résonance, maximale ou minimale environ à une largeur de la résonance stricte. Une telle courbe est appelée courbe de dispersion. Elle décrit de façon assez réaliste la variation de l'indice de réfraction ordinaire au voisinage de la résonance. La variation de l'indice avec la longueur d'onde étant liée aux phénomènes de dispersion, le nom a été conservé pour cette forme de courbes. Des courbes d'absorption et de dispersion typiques sont représentées sur la figure 2.2

2.6 Relations de Kramers–Krönig

On pourrait penser à priori que dispersion et absorption sont deux phénomènes indépendants. On pourrait alors imaginer par exemple des milieux qui, dans une très large gamme de fréquence, auraient une très forte absorption en dépit d'un indice voisin de un. Ce seraient de parfaits pièges à lumière. On pourrait aussi imaginer des verres qui feraient la fortune des lunetiers en étant de très grand indice et néanmoins totalement transparents, là aussi dans une large gamme de fréquences. En fait, nous allons montrer que la simple causalité (la polarisation ne peut répondre au champ avant que celui-ci n'ait été appliqué) impose des relations très fortes entre les parties réelles et imaginaires de l'indice. En fait, quand la première est connue sur tout le spectre, la seconde peut aisément être déterminée par une simple transformation mathématique.

Le point de départ est le lien entre polarisation et champ par la fonction de Green, transformée de Fourier de la susceptibilité:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int G(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) . \quad (2.88)$$

toutes ces quantités s'entendant à un point \mathbf{r} donné. En fait, nous ferons le calcul pour la susceptibilité électrique, mais il s'appliquerait aussi bien à toutes nos susceptibilités, ou à toute forme de réponse

linéaire. Les relations que nous allons établir sont donc très générales, dépassant largement le cadre de l'électromagnétisme. Nous considérons ici la susceptibilité comme scalaire. Des aménagements de détail du calcul permettraient de traiter le cas tensoriel. Nous savons que la fonction de Green est la transformée de Fourier de la susceptibilité:

$$G(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega . \quad (2.89)$$

Cette intégrale peut bien sûr être transformée en une intégrale sur le plan complexe. Le chemin d'intégration est constitué de l'axe réel, parcouru dans le sens positif et fermé par un demi-cercle "à l'infini" (on pourra se reporter à la figure du chapitre sur les potentiels retardés, troisième partie). Si $\tau < 0$, le demi-cercle doit se trouver dans le demi-plan supérieur. C'est à cette condition que l'exponentielle $e^{-i\omega\tau}$ annule l'intégrale sur ce demi-cercle. En revanche, pour $\tau > 0$ on doit boucler le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur. La causalité impose bien sûr que $G(\tau)$ s'annule pour $\tau < 0$. L'intégrale sur le contour dans le demi-plan supérieur est donc identiquement nulle. Cela impose, l'exponentielle étant régulière sur tout le plan complexe, que la susceptibilité χ ne présente de pôles que dans le demi-plan inférieur. On pourra vérifier aisément que les susceptibilités déduites du modèle de Thomson ou du modèle quantique présentent cette propriété. Notons que des pôles situés strictement sur l'axe réel correspondraient à des résonances sans amortissement (voir le calcul quantique de la quatrième partie), ce qui n'est guère physique.

Considérons maintenant la fonction:

$$\frac{\chi(\omega)}{2i\pi(\omega - z_0)} , \quad (2.90)$$

où z_0 a une partie imaginaire positive. Cette fonction admet donc un pôle unique en z_0 dans le demi-plan supérieur, dont le résidu est trivialement $\chi(z_0)/2i\pi$. L'intégrale sur le contour composé de l'axe réel et du demi-cercle supérieur est alors égale à ce résidu (multiplié par $2i\pi$). Pour tout système physique, la susceptibilité doit tendre rapidement vers 0 quand le module de la fréquence tend vers l'infini. L'intégrale sur le "demi-cercle à l'infini" est donc négligeable, et l'intégrale sur le contour se ramène à celle le long de l'axe réel. On a donc finalement:

$$\chi(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega)}{2i\pi(\omega - z_0)} . \quad (2.91)$$

Posons maintenant:

$$z_0 = \omega_0 + i\epsilon , \quad (2.92)$$

avec ω_0 réel et prenons la limite de l'expression précédente pour $\epsilon \rightarrow 0$. Le point z_0 tend alors vers le point ω_0 de l'axe réel. Le premier membre, puisque χ est régulière dans tout le demi-plan supérieur, tend vers $\chi(\omega_0)$. On a donc:

$$\chi(\omega_0) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} . \quad (2.93)$$

On montre facilement, en théorie des distributions, que ³:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} = \mathcal{P}\mathcal{P}(1/(\omega - \omega_0)) + i\pi\delta(\omega - \omega_0) . \quad (2.94)$$

³On peut comprendre qualitativement cette limite en observant que la fonction à intégrer est, pour sa partie réelle, une courbe de dispersion (dérivée de Lorentzienne) et, pour sa partie imaginaire, une simple Lorentzienne. Ces deux courbes sont de largeur ϵ . Quand $\epsilon \rightarrow 0$, la seconde tend trivialement vers une fonction de Dirac. La première estime la différence entre deux valeurs infiniment proches de la fonction sur laquelle porte la distribution, ce qui est bien, fondamentalement, l'action de la distribution partie principale.

La distribution “partie principale en ω_0 ”, \mathcal{PP} est, rappelons le, définie par:

$$\left\langle \mathcal{PP} \frac{1}{\omega - \omega_0} | f \right\rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega_0 - \eta} + \int_{\omega_0 + \eta}^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} \right] \quad (2.95)$$

On a donc finalement, en constatant que l'action de δ sur χ est triviale,

$$\chi(\omega_0) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{PP} \int \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} . \quad (2.96)$$

En isolant, dans cette expression, les parties réelles et imaginaires, on obtient enfin les relations de Kramers–Krönig proprement dites:

$$\chi'(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \mathcal{PP} \int \frac{\chi''(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (2.97)$$

$$\chi''(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{PP} \int \frac{\chi'(\omega)}{\omega - \omega_0} . \quad (2.98)$$

Les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité sont donc reliées par une transformation mathématique très simple. On peut comprendre ainsi pourquoi, si la partie imaginaire au voisinage d'une résonance, a un comportement Lorentzien, la partie réelle a la forme d'une courbe de dispersion. La partie principale calcule en effet une “sorte de dérivée” de la fonction. Elle est nulle si la fonction est paire par rapport au point ω_0 , non nulle quand la fonction est impaire. La partie réelle est donc nulle au maximum de la partie imaginaire, au sommet de la résonance. Elle est en revanche importante quand la partie imaginaire varie rapidement, dans les ailes de la résonance. On voit donc bien que ces parties réelle et imaginaire sont fortement liées et que l'une ne saurait être grande sans que l'autre ne soit également importante, dans un domaine de fréquence voisin. Ces relations ont de nombreuses conséquences en théorie de la réponse linéaire. Elles peuvent, en pratique, être utilisées pour déterminer la réfraction si seule l'absorption est expérimentalement disponible (c'est par exemple le cas pour les milieux fortement absorbants), ou l'inverse.

Chapitre 3

Propagation dans les milieux linéaires

Nous allons maintenant appliquer les équations de Maxwell macroscopiques et les susceptibilités au problème de la propagation de champs monochromatiques dans des milieux matériels. Nous pourrions préciser le contenu physique de la dispersion et de l'absorption. Nous nous préoccupons en fait essentiellement de deux types de milieux: les diélectriques transparents et les milieux conducteurs, regroupant métaux et plasmas. Dans un deuxième temps, nous établirons les lois de continuité des champs au voisinage d'une interface entre deux matériaux différents. Nous appliquerons ces lois au passage d'une onde plane entre deux matériaux diélectriques. Nous en déduirons les lois de Descartes de l'optique géométrique, mais aussi les coefficients de Fresnel donnant les amplitudes relatives des ondes transmises et réfléchies.

3.1 Equations de propagation

Nous considérerons donc la propagation d'un champ harmonique, de fréquence ω dans un milieu matériel. Ce milieu est caractérisé par les permittivité diélectrique ϵ_r , perméabilité magnétique μ_r relatives et par la conductivité σ . Nous supposons le milieu homogène et ces quantités indépendantes de la position. Nous supposons que le courant macroscopique ne résulte que de la conductivité du matériau et du champ électrique (en d'autres termes, nous supposons que les générateurs sont en dehors de notre milieu). Les équations de Maxwell en régime harmonique s'écrivent alors:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r [\sigma - i\epsilon_0 \epsilon_r \omega] \mathbf{E} . \quad (3.4)$$

A ces équations, nous pouvons adjoindre l'équation de conservation de la charge (qui se déduit des équations de Maxwell), qui s'écrit, avec $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$:

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = i\omega \rho . \quad (3.5)$$

En y injectant l'équation de Gauss, on trouve:

$$i\omega \rho = \sigma \rho / \epsilon_0 \epsilon_r , \quad (3.6)$$

qui n'admet comme solution que $\rho = 0$ à moins que

$$\sigma = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r . \quad (3.7)$$

Ce cas étant a priori plutôt rare, nous l'excluons pour le moment et nous pourrions donc supposer que ρ est toujours identiquement nulle dans les milieux matériels.

Munis de cette simplification considérable, nous pouvons facilement écrire une équation de propagation pour le champ électrique seul ou le champ magnétique seul. En fait, comme dans l'espace libre, les équations de propagation de tous les champs et de tous les potentiels sont identiques. Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation de Helmholtz:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\Omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad (3.8)$$

où la fréquence (complexe) Ω est définie par:

$$\Omega^2 = (\omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r + \mu_0 \mu_r i \omega \sigma) c^2. \quad (3.9)$$

Dans le vide, on retrouve bien sûr $\Omega = \omega$. Toute la physique de la propagation est contenue dans cette fréquence. La solution en termes d'ondes planes avec une direction de propagation selon Oz :

$$\mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.10)$$

devra vérifier la relation de dispersion

$$k^2 = \Omega^2 / c^2. \quad (3.11)$$

3.2 Milieux diélectriques

Nous considérerons d'abord le plus simple des matériaux, un matériau diélectrique ($\epsilon_r \neq 1$), dépourvu de toutes propriétés magnétiques ($\mu_r = 1$) et strictement isolant ($\sigma = 0$). La relation de dispersion s'écrit alors:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}. \quad (3.12)$$

Nous poserons:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}, \quad (3.13)$$

et écrivons donc la relation de dispersion sous la forme:

$$k = n \frac{\omega}{c} = nk_0, \quad (3.14)$$

où $k_0 = \omega/c$ serait le module du vecteur d'onde pour une propagation dans le vide à cette fréquence. Nous appellerons n l'indice de réfraction de notre matériau diélectrique. Il donne en effet le rapport entre la longueur d'onde dans le vide et la longueur d'onde dans le milieu.

Comme n est en général une quantité complexe, ainsi que ϵ_r ou χ^e , l'indice de réfraction est aussi une quantité complexe:

$$n = n' + in''. \quad (3.15)$$

On peut montrer simplement que:

$$n' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon'_r + \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}} \quad (3.16)$$

et que

$$n'' = \frac{\epsilon''_r}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon'_r + \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}}}. \quad (3.17)$$

Notons que, pour respecter le sens choisi pour la propagation de l'onde, le signe de n' doit être positif. Il n'y a donc pas d'ambiguïté sur le signe de n'' . Comme $\epsilon''_r = \chi''$, la partie imaginaire de l'indice est

liée directement au coefficient d'absorption du milieu. On peut en effet remarquer que l'expression de l'onde plane de vecteur d'onde complexe peut se réécrire:

$$\mathbf{E}_0 e^{-n'' k_0 z} e^{i(k_0 n' z - \omega t)} . \quad (3.18)$$

Il s'agit d'une onde dont l'amplitude décroît exponentiellement lors de la propagation dans le milieu. La partie réelle, pour sa part, correspond à une augmentation du module du vecteur d'onde, donc à une réduction de la longueur d'onde (si la partie réelle de l'indice est plus grande que un, ce qui est fréquemment le cas). Il s'agit donc de l'indice de réfraction tel que le conçoit l'optique géométrique. La vitesse de phase de cette onde évanescence (la vitesse à laquelle se propagent les plans d'égal phase ou plans d'onde) est manifestement donnée par:

$$v_\phi = \frac{c}{n'} . \quad (3.19)$$

Elle est donc plus petite que la vitesse de la lumière dans un facteur égal à la partie réelle de l'indice de réfraction. La vitesse de groupe, pour sa part, dépend en général de la dépendance de n avec ω . On établira sans peine que:

$$v_g = \frac{c/n}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} . \quad (3.20)$$

Au voisinage d'une résonance atomique, l'indice de réfraction varie rapidement avec ω et peut être une fonction décroissante de ω . On peut avoir, dans cette région de "dispersion anormale" une vitesse de groupe très petite ou très grande devant c , voire même une vitesse de groupe négative. C'est bien sûr la notion même de vitesse de groupe qui perd son sens dans ce cas. Elle ne s'applique a priori qu'à un paquet d'onde suffisamment large en fréquence pour être bien localisé dans l'espace, mais très étroit devant l'échelle de variation de la vitesse de propagation pour se propager encore sans déformation notable. Au voisinage d'une résonance très étroite, ces conditions ne sont pas remplies et le paquet se déforme considérablement, laissant une très grande marge à l'interprétation dans la définition de sa vitesse de propagation. Un certain nombre d'annonces spectaculaires récentes de "propagation supraluminique" reposent sur cette ambiguïté. En fait, quelle que soit la forme du paquet et de la dispersion, on montre qu'aucun signal ne peut se propager plus vite que c .

Nous avons ici les expressions exactes des parties réelles et imaginaires de l'indice de réfraction. Elles se simplifient beaucoup si le milieu est peu dense et/ou la susceptibilité, réelle comme imaginaire, est très inférieure à un. On peut en effet dans ce cas développer les expressions précédentes et obtenir:

$$n' = 1 + \chi'/2 \simeq 1 + N\alpha'/2 \quad (3.21)$$

$$n'' = \chi''/2 \simeq N\alpha''/2 . \quad (3.22)$$

Ces expressions de l'indice en fonction de la polarisabilité sont très utiles en pratique.

L'équation de propagation ne précise pas les amplitudes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 des champs électriques et magnétiques. Leur divergence étant nulle, ils sont tous deux perpendiculaires au vecteur d'onde \mathbf{k} . La première équation de Maxwell s'écrit, pour une onde plane de vecteur d'onde (complexe) \mathbf{k} :

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0 . \quad (3.23)$$

On en déduit que la structure de l'onde plane est conservée, \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 et \mathbf{k} formant encore un trièdre direct. En revanche, pour un indice complexe, les champs ne sont pas nécessairement en phase, et le rapport de leurs modules est $B_0/E_0 = |n|/c$.

Dans le cas d'un milieu absorbant, l'énergie de l'onde passe à la matière sur une distance de l'ordre de $1/n''k_0$. Des notions comme le vecteur de Poynting ont donc un intérêt physique limité. Pour établir des bilans énergétiques, nous allons donc considérer le cas d'un milieu diélectrique complètement transparent ($n'' = 0$). Notons que les relations de Kramers Kronig n'interdisent nullement à l'absorption

d'être nulle pour une fréquence avec une partie réelle d'indice non nulle à la même fréquence. Les champs électriques et magnétiques sont alors en phase, et on a: $B_0 = nE_0/c$. Le vecteur de Poynting, sans surprises, pointe donc dans la direction du vecteur d'onde, et sa valeur moyenne temporelle s'écrit:

$$\bar{\Pi} = \frac{\epsilon_0 n c}{2} E_0^2 . \quad (3.24)$$

La densité d'énergie électromagnétique s'écrit, en valeur instantanée:

$$u = \epsilon_0 n^2 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 . \quad (3.25)$$

En utilisant le rapport entre les amplitudes de \mathbf{E} et \mathbf{B} , on montre que, comme pour l'onde plane dans le vide, les densités d'énergies électriques et magnétiques sont égales à chaque instant. La valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie s'écrit finalement:

$$\bar{u} = \epsilon_0 n^2 \frac{E_0^2}{2} . \quad (3.26)$$

En faisant maintenant le rapport de la valeur moyenne du vecteur de Poynting avec la valeur moyenne de la densité d'énergie, on doit obtenir, comme pour l'onde plane dans le vide, la vitesse de propagation de l'énergie, qui doit coïncider avec la vitesse de groupe¹:

$$v_g = \frac{\bar{\Pi}}{\bar{u}} = \frac{c}{n} . \quad (3.27)$$

La vitesse de groupe, ou de propagation de l'énergie, est donc égale à la vitesse de phase, et plus petite (si $n > 1$) que la vitesse de la lumière. Il s'agit bien sûr d'un résultat très classique d'optique géométrique.

3.3 Milieux conducteurs

Nous allons maintenant considérer la propagation dans un milieu conducteur, pourvu de propriétés diélectriques, mais dépourvu de propriétés magnétiques. Nous aurons donc $\sigma \neq 0$, $\epsilon_r \neq 1$, mais $\mu_r = 1$. Nous supposons de plus que la permittivité diélectrique relative est pratiquement indépendante de la fréquence. On pourra ainsi traiter de la propagation dans les métaux. Les électrons libres sont alors responsables de la conductivité, en général élevée, alors que les ions métalliques sont responsables des propriétés diélectriques. Les électrons libres, dans un tel matériau, sont mis en mouvement globalement par tout champ appliqué et contribuent donc au courant macroscopique, libre, alors que les autres électrons et ions, fixes, ne contribuent qu'aux charges liées. Nous pourrions aussi traiter des plasmas, où électrons et ions libres contribuent tous deux aux courants libres. Cependant, la masse des ions est toujours très grande par rapport à celle des électrons. Pour des champs de haute fréquence, les ions ne suivent pratiquement pas le champ appliqué et on peut considérer que seuls les électrons participent à la conduction et aux courants libres, les ions restant spectateurs et ne contribuant qu'aux propriétés diélectriques par leur polarisabilité. En d'autres termes, au prix de cette approximation, on voit que les propagations dans un plasma ou dans un métal sont essentiellement identiques.

3.3.1 Modèle de conductivité

Avant de décrire en détails la propagation, nous allons donner un modèle simple mais réaliste de conductivité, qui nous permettra de préciser sa dépendance en fréquence. Ce modèle est très universel

¹Nous faisons ici en fait, de façon implicite, l'hypothèse que le spectre en fréquence du paquet d'ondes que l'on propage est très étroit par rapport au domaine de variation de l'indice avec la fréquence. Si l'indice ne dépend pas de la fréquence, $v_g = d\omega/dk$ est précisément égal à c/n .

et s'applique aussi bien aux électrolytes qu'aux plasmas ou aux métaux. Nous ne discuterons toutefois les ordres de grandeur que pour un métal bon conducteur, comme le cuivre. Nous ne considérerons aussi qu'un seul type de porteurs de charges libres que nous assimilerons à des électrons. C'est le cas pour les métaux et une bonne approximation pour les plasmas.

Sous l'action du champ électrique \mathbf{E} , les porteurs libres se mettent en mouvement d'ensemble. En général, ce mouvement d'ensemble se superpose aux mouvements aléatoires d'origine thermique (pour les plasmas) ou quantiques (principe d'exclusion de Fermi pour les métaux). Bien que ces vitesses aléatoires soient beaucoup plus grandes que les vitesses d'ensemble², nous allons écrire uniquement une équation sur la vitesse d'ensemble \mathbf{v} :

$$m\dot{\mathbf{v}} + m\gamma\mathbf{v} = q\mathbf{E} , \quad (3.28)$$

où m et q sont la masse et la charge des porteurs, et où γ est un facteur phénoménologique de friction, décrivant l'inévitable amortissement de la vitesse d'ensemble sous l'influence des collisions avec le réseau. La solution évidente de cette équation en régime harmonique est:

$$\mathbf{v} = \frac{q\mathbf{E}}{m(\gamma - i\omega)} . \quad (3.29)$$

Le courant macroscopique étant donné par:

$$\mathbf{j} = Nq\mathbf{v} , \quad (3.30)$$

où N est la densité numérique de porteurs au point considéré, on peut finalement écrire la conductivité comme:

$$\sigma = \frac{Nq^2}{m(\gamma - i\omega)} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma - i\omega} . \quad (3.31)$$

Nous avons introduit la "fréquence de plasma" du conducteur (dont la signification physique apparaîtra plus clairement dans les prochains chapitres):

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0\epsilon_r} . \quad (3.32)$$

Nous trouvons donc en général une conductivité complexe. Le mouvement des porteurs de charges a en effet un temps de réponse au champ appliqué, de l'ordre de γ^{-1} . Le courant ne suivant pas instantanément le champ, il est déphasé par rapport à celui-ci. Ce n'est que pour des fréquences très petites devant γ qu'on retrouve une conductivité réelle.

Pour fixer un peu les ordres de grandeur, considérons un bon métal (cuivre) à très basse fréquence. La conductivité est de l'ordre de $10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. La densité numérique d'électrons s'obtient facilement en calculant le nombre d'atomes par unité de volume (chacun participant par un électron à la conduction). On a environ $N = 10^{28} \text{ m}^{-3}$. En assimilant la permittivité diélectrique relative à 1, on trouve ainsi l'ordre de grandeur du taux de relaxation $\gamma \simeq 10^{13}\text{s}^{-1}$. Cet ordre de grandeur est relativement réaliste. Pour une propagation d'électrons dans un réseau métallique, il correspond assez bien au temps moyen entre deux collisions avec les défauts du réseau (joints de grains, dislocations...). Avec ces mêmes ordres de grandeur, la fréquence plasma est de 10^{16} Hz . Elle est très élevée par rapport au taux de relaxation. Les longueurs d'onde correspondant au taux de relaxation sont dans le domaine de l'infrarouge lointain alors que celles correspondant à la fréquence de plasma sont dans l'ultraviolet proche.

²L'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble dans les métaux est le millimètre par seconde, alors que les vitesses de Fermi sont de l'ordre du centième de celle de la lumière.

Avec ce modèle simple de la conductivité, on peut écrire le vecteur d'onde complexe d'une onde plane se propageant dans le milieu en fonction de ω (relation de dispersion). On obtiendra :

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_r \left[1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega(\gamma - i\omega)} \right]. \quad (3.33)$$

En général, k présente une partie imaginaire et l'onde est absorbée dans le milieu. Les électrons, soumis à une force de friction, dissipent en effet de l'énergie. Pour préciser un peu le comportement de k , on peut séparer trois domaines de fréquence selon les valeurs relatives de ω , ω_p et γ .

3.3.2 Propagation très basse fréquence

Nous considérerons ici une fréquence très basse par rapport au taux de relaxation :

$$\omega \ll \gamma \ll \omega_p. \quad (3.34)$$

La conductivité est alors pratiquement réelle :

$$\sigma \simeq \frac{Nq^2}{m\gamma} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma}, \quad (3.35)$$

(on retrouve le modèle de conductivité de Drude dans ce régime basse fréquence) et on peut écrire :

$$k^2 \simeq k_0^2 \epsilon_r \left[1 + i \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega} \right]. \quad (3.36)$$

Dans l'expression entre crochets, le second terme est très grand devant 1, qui peut être négligé. L'extraction de la racine ne pose aucun problème et on trouve :

$$k = \pm(1 + i)/\delta, \quad (3.37)$$

avec

$$\delta = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{2\gamma\omega}{\epsilon_r \omega_p^2}} = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma\omega}}, \quad (3.38)$$

où on a noté que $\omega_p^2 = \sigma\gamma/\epsilon_0\epsilon_r$. Les parties réelles et imaginaires du vecteur d'onde sont donc égales. L'onde s'amortit sur une distance δ , égale à la longueur d'onde dans le milieu. Une onde électromagnétique ne peut pénétrer dans un milieu conducteur. C'est l'effet de peau, bien connu des techniciens des hautes fréquences.

Précisons l'ordre de grandeur de la profondeur de peau, δ , pour un bon métal comme le cuivre. Elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur d'onde dans le vide à la même fréquence. Pour une très basse fréquence, $\omega = 2\pi \times 50$ Hz, on trouve $\delta \simeq 3$ cm. La profondeur de peau à une fréquence aussi basse est en général très grande par rapport à l'épaisseur des circuits ou des fils. On néglige cet effet le plus souvent en électrotechnique sauf sur les lignes à très haute puissance, de grand diamètre en général. Cet ordre de grandeur montre aussi qu'il est très difficile d'écranter efficacement un circuit électronique des très basses fréquences. Pour une fréquence beaucoup plus élevée, $2\pi \times 50$ Mrd/s, par exemple, la profondeur de peau n'est plus que de $30 \mu\text{m}$. A haute fréquence, le champ ne pénètre pratiquement pas dans le conducteur. Quand on veut transmettre une puissance importante, il est donc préférable de donner au conducteur la forme d'un ruban très aplati, ayant une épaisseur de l'ordre de la profondeur de peau. Cet ordre de grandeur prouve aussi que l'on peut très efficacement écranter un circuit électronique du bruit haute fréquence en le plaçant dans un blindage métallique d'épaisseur modérée.

3.3.3 Propagation haute fréquence

Considérons maintenant le cas où la fréquence est supérieure à la fréquence de plasma et donc très grande par rapport au taux d'amortissement:

$$\omega > \omega_p \gg \gamma . \quad (3.39)$$

La relation de dispersion s'écrit alors, en négligeant γ :

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_r \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] . \quad (3.40)$$

La quantité dans le crochet étant réelle positive, la propagation s'effectue avec un vecteur d'onde réel, sans amortissement (nous avons en effet éliminé le taux de relaxation). L'indice de réfraction est:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} . \quad (3.41)$$

Dans le cas où $\epsilon_r = 1$, cet indice est plus petit que l'unité. Cela reflète le fait que la vitesse de phase de l'onde:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} , \quad (3.42)$$

est plus grande que la vitesse de la lumière. Cette vitesse de phase ne correspond pas à la vitesse de propagation de l'énergie, donnée par la vitesse de groupe. Rien ne lui impose donc d'être plus petite que c . La vitesse de groupe est donnée par:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} . \quad (3.43)$$

Elle est donc plus petite que $c/\sqrt{\epsilon_r}$, comme il se doit. On remarquera d'ailleurs que:

$$v_g v_\phi = \frac{c^2}{\epsilon_r} . \quad (3.44)$$

Cette relation, assez générale, est également vérifiée pour la propagation dans les guides d'onde, la fréquence de plasma étant alors remplacée par la fréquence de coupure du guide. Notons que la vitesse de groupe tend vers zéro et que la vitesse de phase diverge quand la fréquence tend vers la fréquence de plasma. Au voisinage immédiat de cette fréquence, l'onde ne se propage pratiquement plus. La fréquence de plasma joue donc bien le rôle d'une fréquence de coupure dans ce problème. Le comportement en fréquence de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase est illustré sur la figure 3.1.

3.3.4 Régime intermédiaire

Nous considérerons maintenant les fréquences plus faibles que la fréquence de plasma mais néanmoins très supérieures au taux d'amortissement:

$$\omega_p > \omega \gg \gamma . \quad (3.45)$$

La relation de dispersion peut alors encore s'écrire, en négligeant γ :

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_r \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] . \quad (3.46)$$

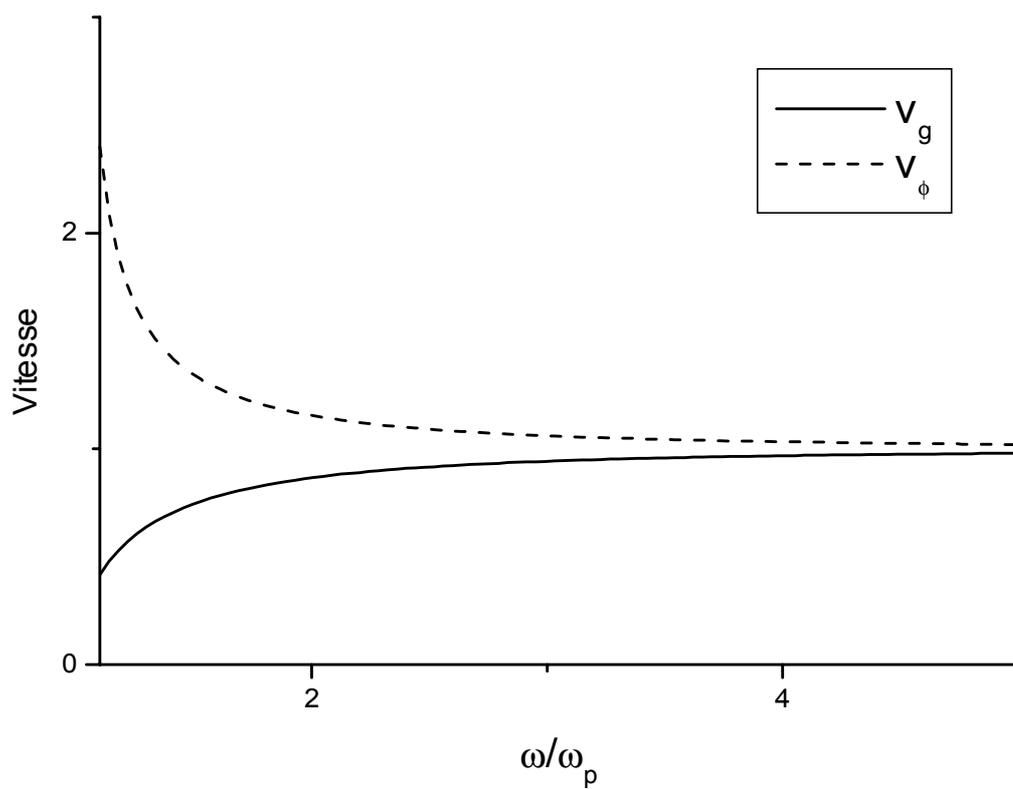


Figure 3.1: Vitesse de groupe et vitesse de phase en fonction de ω/ω_p , en unités de la vitesse de la lumière dans le milieu.

La quantité entre crochets est maintenant négative et k est un imaginaire pur. Nous avons donc une onde dont la phase est partout la même (vitesse de phase infinie) et dont l'amplitude décroît exponentiellement dans le milieu avec une profondeur de pénétration:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\omega_p^2 - \omega^2)}} . \quad (3.47)$$

L'ordre de grandeur de cette profondeur de peau, sauf au voisinage immédiat de la fréquence plasma où elle diverge, est la longueur d'onde de plasma, c/ω_p . Il s'agit donc d'une quantité très inférieure au micron. Il y a donc, à la fréquence plasma, une discontinuité très nette entre deux régimes: un régime de très forte absorption au dessous de la fréquence plasma et un régime de transparence parfaite au dessus. Le conducteur doit donc présenter un comportement résonnant à la fréquence plasma. C'est ce comportement que nous allons explorer maintenant.

3.3.5 Ondes de Plasma

Si nous nous plaçons à la fréquence de plasma, nous pouvons négliger le taux d'amortissement γ . Nous pouvons alors voir que la conductivité vérifie:

$$\sigma = i\epsilon_0\epsilon_r\omega_p . \quad (3.48)$$

En établissant les équations de propagation, nous avons explicitement exclu ce cas. C'est en effet seulement quand cette condition est vérifiée qu'il peut exister une densité de charges dans le milieu. Si ρ est non nulle, il peut exister un champ électrique de divergence non nulle. Si nous cherchons ce champ sous la forme d'une onde plane, il s'agit d'une onde longitudinale, dont l'amplitude est colinéaire au vecteur d'onde. Nous l'appellerons onde de plasma. En prenant la direction de propagation selon Oz , nous pouvons donc chercher une solution en onde plane sous la forme:

$$E_z e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{u}_z . \quad (3.49)$$

On peut alors écrire le rotationnel de \mathbf{B} :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0[\sigma - i\omega_p\epsilon_0\epsilon_r]\mathbf{E} . \quad (3.50)$$

Le crochet étant précisément nul à la fréquence de plasma, le rotationnel de \mathbf{B} est nul. Le champ magnétique, dont divergence et rotationnel sont nuls, est donc identiquement nul.

Physiquement, l'onde que nous venons de décrire correspond donc à une modulation sinusoïdale de la densité de porteurs libres dans l'espace à un instant donné. Il en résulte un champ électrique longitudinal qui tend à ramener les charges à leur position d'équilibre. En l'absence d'amortissement, le plasma oscille autour de cette position d'équilibre, à une fréquence déterminée seulement par sa densité, ω_p . On pourra se convaincre aisément que le vecteur d'onde de l'onde de plasma est complètement arbitraire car il n'existe aucune relation de dispersion.

Dans un plasma assez dense, les champs électriques associés aux ondes de plasmas peuvent être très intenses. Il a été suggéré de les utiliser pour réaliser des accélérateurs de particules. Un battement entre deux faisceaux lasers de fréquences supérieures à la fréquence de plasma, se propageant donc librement, se couple par des effets non linéaires à la densité de charges et excite une onde de plasma. Il est possible, en choisissant correctement les vecteurs d'onde incidents d'accorder la vitesse de phase de l'onde de plasma à celle de la particule en accélération et de faire en sorte qu'elle soit toujours soumise à un champ électrique accélérateur. Au moins sur le papier, ces accélérateurs linéaires à plasma devraient avoir des performances tout à fait remarquables. Il ne reste qu'à vaincre les nombreuses difficultés techniques.

3.4 Relations de passage

Nous avons considéré jusque-là la propagation dans un milieu linéaire homogène. Nous allons maintenant, en route vers l'optique géométrique, nous poser le problème d'une discontinuité plane (au moins localement) entre deux milieux linéaires de caractéristiques différentes. Nous aurons à l'esprit surtout les interfaces entre diélectriques transparents mais la plupart de nos résultats s'appliqueront à des milieux arbitraires. Nous commencerons par établir les relations de continuité vérifiées par les champs électrique et magnétique de part et d'autre de l'interface. Nous en déduirons ensuite, en considérant le passage d'une onde plane d'un milieu à l'autre, les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. Enfin, nous établirons les relations de Fresnel qui lient les amplitudes des ondes réfléchie, réfractée et incidente.

3.4.1 Conditions aux limites

Nous considérons donc une interface entre deux milieux 1 et 2, au voisinage d'un point où la normale à l'interface, orientée conventionnellement de 1 vers 2, est \mathbf{n} . Nous calculerons flux et circulation des champs sur deux types d'objets.

Nous considérerons d'abord une "boîte de Camembert, cylindrique, de base dS . Les deux faces sont parallèles à la surface, situées immédiatement au dessus pour l'une et au dessous pour l'autre. La paroi latérale a une surface infinitésimale par rapport à dS . Le flux de \mathbf{B} à travers la boîte doit être identiquement nul. Le flux sur la surface latérale étant négligeable, on a donc:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.51)$$

où \mathbf{B}_2 et \mathbf{B}_1 désignent les champs magnétiques de part et d'autre de la surface, au voisinage immédiat du point considéré. La composante normale à la surface du champ magnétique est donc continue. En appliquant le même raisonnement au déplacement électrique, on a:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma, \quad (3.52)$$

où σ est une éventuelle densité surfacique de charges libres localisée sur la surface. La composante normale du déplacement électrique présente donc la même discontinuité qu'en électrostatique.

Les deux autres équations de Maxwell portent sur des rotationnels. Nous utiliserons donc la circulation des champs sur un contour rectangulaire. Les deux grands côtés sont parallèles à la surface, de longueur dl selon un vecteur unitaire \mathbf{u} . Un des côtés est situé dans le milieu 1, l'autre dans le milieu 2. Les deux petits côtés, perpendiculaires à l'interface, ferment le rectangle. Leur longueur est infinitésimale par rapport à dl . La circulation de \mathbf{E} sur ce contour est égale à la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers le contour. Le champ magnétique est sûrement borné au voisinage de l'interface, même s'il est discontinu. Le flux de ce champ dans le contour, dont la hauteur est infinitésimale par rapport à la longueur, est donc négligeable. La circulation de \mathbf{E} sur ce contour est donc nulle:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{u} dl = 0. \quad (3.53)$$

\mathbf{u} étant un vecteur arbitraire perpendiculaire à \mathbf{n} , cette relation exprime que la composante tangentielle du champ électrique est continue. Elle peut aussi s'écrire:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0. \quad (3.54)$$

Ecrivons enfin l'équation de Maxwell–Ampère. La circulation de \mathbf{H} sur le contour fait intervenir la dérivée par rapport au temps du flux de \mathbf{D} . Comme \mathbf{B} plus haut, \mathbf{D} est une quantité bornée au voisinage de l'interface et ce flux est négligeable. En revanche, le courant de conduction des charges libres peut avoir un flux non nul à travers le contour s'il s'agit d'un courant surfacique. Ce flux pourra s'écrire $dl \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{v}$, en posant $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ (il s'agit évidemment du vecteur définissant la normale à la

surface rectangulaire s'appuyant sur notre contour). \mathbf{j}_s est la densité de courant surfacique, intégrale d'un courant volumique très localisé au voisinage de l'interface, sur une épaisseur infinitésimale par rapport à toutes les longueurs considérées ici. Notons que la dimension de \mathbf{j}_s est celle d'un courant divisé par une longueur (ou d'une densité de courant multipliée par une longueur). On obtient donc une intensité en intégrant \mathbf{j}_s sur une ligne tracée sur la surface. On a donc finalement:

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j}_s \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}) . \quad (3.55)$$

Cette relation étant vraie pour toute orientation de \mathbf{u} parallèlement à la surface, on a:

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n} , \quad (3.56)$$

ou:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s . \quad (3.57)$$

On peut finalement regrouper les conditions au limites pour les quatre champs sous la forme:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (3.58)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3.59)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.60)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s , \quad (3.61)$$

pour lesquelles on prendra garde que \mathbf{n} est orienté de 1 vers 2. En ajoutant les relations définissant les susceptibilités, ces équations déterminent complètement les discontinuités des champs au passage de la surface. On aura évidemment noté que ces équations sont les mêmes qu'en électrostatique ou en magnétostatique. Comme nous n'avons, pour les établir, considéré qu'un domaine infinitésimal au voisinage de la surface, il est assez clair que les phénomènes de propagation, ou même d'induction, ne peuvent jouer aucun rôle.

3.4.2 Passage entre deux milieux diélectriques

Considérons maintenant, pour nous rapprocher encore de l'optique, une onde plane incidente sur un dioptre plan entre deux milieux diélectriques, non magnétiques, de permittivités diélectriques relatives (éventuellement complexes) ϵ_1 et ϵ_2 . Nous noterons \mathbf{k}_i le vecteur d'onde incident. Cette onde se propage dans le milieu 1. L'interface étant dépourvue de toute densité de charges ou de courants libres, les composantes tangentielles de \mathbf{E} et de \mathbf{H} et les composantes normales de \mathbf{D} et de \mathbf{B} sont continues. En fait, les relations de dispersion dans les deux milieux et ces conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que s'il existe, dans le milieu 2, une onde transmise de vecteur d'onde différent \mathbf{k}_t et une onde réfléchié dans le milieu 1, de vecteur d'onde \mathbf{k}_r .

Lois de Descartes

Les conditions de passage entre les deux milieux étant linéaires, elles ne pourront être satisfaites à tous les instants que si ces trois ondes ont exactement la même fréquence ω . Notons qu'il existe des interfaces, parfois très simples comme la surface de l'eau, qui possèdent des propriétés non linéaires et sont capables de réfléchir l'harmonique deux de la fréquence incidente. Ce genre de phénomène, fournissant de précieux renseignements sur la structure de l'interface (orientation des molécules par exemple) étant très marginal, nous le négligerons ici.

Toutes les relations de passage peuvent donc, en éliminant les facteurs oscillants communs, se mettre sous la forme:

$$ae^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + be^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} + ce^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = 0 , \quad (3.62)$$

où \mathbf{r} est un point du dioptre et a , b , c des coefficients constants ne dépendant que de la géométrie des ondes et de leurs polarisations. Pour que ces relations soient vérifiées quel que soit \mathbf{r} , il faut évidemment que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}$ et $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r}$ soient des constantes en fonction de \mathbf{r} . En prenant l'origine sur la surface, ces constantes sont nulles et on en déduit que $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r$ et $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t$ sont perpendiculaires à la surface. On en déduit donc la première loi de Descartes: les trois vecteurs d'onde ainsi que la normale \mathbf{n} au dioptre sont dans un même plan.

Dans ce plan, nous définirons l'angle d'incidence θ_i comme l'angle de \mathbf{k}_i avec la normale au dioptre orientée dans la direction du rayon incident ($-\mathbf{n}$ avec nos notations). Nous définirons de même l'angle de réflexion, θ_r et l'angle de réfraction, θ_t , défini, cette fois, par rapport à \mathbf{n} . On peut alors écrire, dans le plan d'incidence, l'égalité des composantes selon la surface des trois vecteurs d'onde. Quand on note que les modules de \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_r sont les mêmes puisque ces ondes se propagent dans le même milieu, on en déduit immédiatement l'égalité des angles d'incidence et de réflexion (deuxième loi de Descartes). Finalement, en écrivant que $k_i = n_1\omega/c$ et $k_t = n_2\omega/c$, où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des deux milieux, on établit:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t , \quad (3.63)$$

la troisième loi de Descartes. Finalement, les lois de la réflexion et de la réfraction de l'optique géométrique se déduisent simplement de l'existence et de la linéarité des conditions aux limites. Elles sont donc très générales et peuvent, par exemple, s'appliquer avec des modifications mineures à l'acoustique.

La troisième loi de Descartes contient bien sûr le phénomène de réfraction limite quand on passe d'un milieu d'indice fort à un milieu d'indice faible. Il n'y a plus alors d'angle réel qui satisfasse aux lois de Descartes pour le faisceau transmis et toute l'énergie incidente est réfléchi. On peut cependant accorder dans ce cas un peu plus de crédit aux lois de Descartes qu'on ne le fait habituellement. L'angle de réfraction devrait avoir un sinus plus grand que 1. C'est donc un angle complexe. Le vecteur d'onde dans le milieu 2 est donc un vecteur d'onde complexe (au moins dans la direction normale). On a donc, dans le milieu 2, une onde évanescente, avec une profondeur de peau de l'ordre de la longueur d'onde (divisée par 2π quand on fait le calcul complet). Nous laissons au lecteur le soin de déterminer plus précisément les caractéristiques de cette onde.

Coefficients de Fresnel

Nous n'avons utilisé, pour établir les lois de Descartes, que l'existence des conditions de passage et leur linéarité. En fait, ces relations sont connues et nous pouvons maintenant les utiliser pour écrire explicitement les relations entre les amplitudes des ondes incidente et réfléchi. La géométrie du problème est assez complexe si nous considérons une onde incidente de polarisation quelconque. Nous pouvons utiliser une fois de plus la linéarité et ne considérer en fait que deux cas: une polarisation dans le plan d'incidence (polarisation conventionnellement appelée π) et une polarisation perpendiculaire au plan d'incidence (appelée polarisation σ). Les relations de continuité des composantes imposent bien sûr que, si le champ électrique incident est π (σ) les champs réfléchis et transmis seront aussi de polarisation π (σ). Les polarisations des différentes ondes sont donc équivalentes. Les conventions d'orientation pour les amplitudes des champs électrique et magnétique sont résumées sur la figure 3.2.

Considérons d'abord le cas de la polarisation σ . Parmi toutes les relations possibles, nous écrivons la continuité des composantes tangentes de \mathbf{E} et \mathbf{B} . Ces deux relations s'écrivent, en termes des amplitudes complexes, avec les conventions d'orientation de la figure:

$$E_i + E_r = E_t \quad (3.64)$$

$$-B_i \cos \theta_i + B_r \cos \theta_r = -B_t \cos \theta_t . \quad (3.65)$$

En remarquant que $B = nE/c$, on peut écrire la seconde relation en fonction des champs électriques. En exprimant alors $E_r = E_t - E_i$ à partir de la première relation et en utilisant l'égalité des angles de

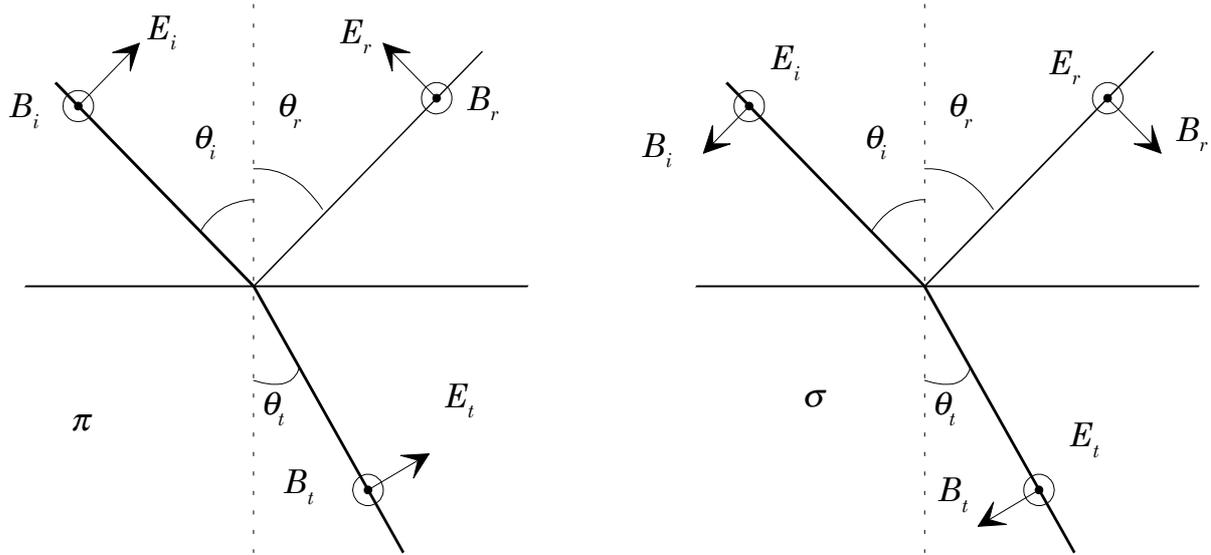


Figure 3.2: Conventions d'orientation des champs électrique et magnétique pour l'établissement des relations de Fresnel. A gauche, polarisation dans le plan d'incidence (π). A droite, polarisation perpendiculaire au plan d'incidence (σ)

réflexion et de réfraction, on tire de la seconde égalité:

$$E_t = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_i} E_i \quad (3.66)$$

et enfin

$$E_r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_i} E_i . \quad (3.67)$$

Ce sont les relations de Fresnel qui donnent les amplitudes des ondes réfléchie et réfractée en fonction de celle de l'onde incidente.

En polarisation π , le calcul est essentiellement le même. On écrit les continuités des composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$B_t = B_i + B_r \quad (3.68)$$

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t . \quad (3.69)$$

On en déduit les relations de Fresnel:

$$E_t = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_i \quad (3.70)$$

$$E_r = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} E_i \quad (3.71)$$

Le cas de l'incidence normale mérite une considération particulière. En polarisation σ , en prenant tous les angles nuls, on trouve:

$$E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i \quad (3.72)$$

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i , \quad (3.73)$$

alors qu'on trouve en polarisation π :

$$E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i \quad (3.74)$$

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_i , \quad (3.75)$$

Ces deux résultats devraient être identiques, les polarisations π et σ étant physiquement indistinguables. La différence de signe sur l'amplitude réfléchi provient d'une différence dans nos choix d'orientation pour les deux polarisations. Quand l'angle d'incidence tend vers zéro, E_i et E_r ont la même orientation de référence en polarisation σ , alors qu'ils sont opposés en polarisation π . Assez étrangement, ces conventions de signe quelque peu absurdes ont survécu à des générations de manuels...

On peut déduire de là les coefficients de transmission et de réflexion pour l'énergie. Les quantités physiquement intéressantes sont les flux normaux à la surface:

$$n_x \cos \theta_x |E_x|^2, \quad (3.76)$$

avec $x = i, r, t$. Soit R le rapport des flux normaux réfléchi et incident, T le rapport des flux transmis et incident. Leurs expressions sont complexes, mais faciles à obtenir à partir des coefficients de Fresnel. En incidence normale, on trouve:

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2 \quad (3.77)$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{|n_1 + n_2|^2}, \quad (3.78)$$

qui vérifient évidemment $R+T = 1$ (cette relation, exprimant la conservation de l'énergie, est d'ailleurs vérifiée quelque soit l'incidence)

Notons qu'en polarisation π , E_r s'annule si:

$$n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \theta_t. \quad (3.79)$$

En combinant cette relation avec la troisième loi de Descartes, on voit que cela correspond à

$$\cos \theta_t = \sin \theta_i \quad (3.80)$$

$$\sin \theta_t = \cos \theta_i \quad (3.81)$$

soit encore

$$\theta_t + \theta_i = \pi/2 \quad (3.82)$$

et

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.83)$$

Pour cette incidence particulière, appelée incidence de Brewster, les rayons réfractés et réfléchis sont perpendiculaires et l'amplitude réfléchi est strictement nulle. On peut d'ailleurs se faire une image assez intuitive du mécanisme de l'incidence de Brewster. Physiquement, l'onde réfléchi doit être rayonnée par des dipôles situés au voisinage de l'interface, dans le matériau 2. Ces dipôles sont orientés selon la polarisation de l'onde réfractée. A l'incidence de Brewster, ils sont donc alignés avec la direction de propagation de l'onde réfléchi. Le rayonnement d'un dipôle étant nul le long de son axe, on comprend bien que l'intensité réfléchi doive être nulle dans ce cas.

On combat au moyen de l'incidence de Brewster les réflexions parasites qui sont sources de pertes dans les systèmes optiques. Les tubes à plasma des lasers à gaz, par exemple, qui contiennent le milieu amplificateur dans la cavité laser, sont fermés par des fenêtres à l'incidence de Brewster, qui n'introduisent donc aucune perte pour la polarisation convenable. La conséquence en est que le rayonnement de ces lasers présente une polarisation linéaire π .

Notons finalement que les relations de Fresnel s'appliquent tout aussi bien au cas des indices de réfraction complexes. Prenons par exemple le cas de l'incidence normale sur un métal à basse fréquence, depuis l'air. L'indice n_1 est alors égal à 1 et l'indice n_2 à:

$$n_2 = (1 + i)x, \quad (3.84)$$

avec:

$$x = \sqrt{\frac{\epsilon_r \omega_p^2}{2\gamma\omega}} \gg 1 . \quad (3.85)$$

On en déduit le coefficient de réflexion pour l'énergie:

$$R = \frac{(1-x)^2 + x^2}{(1+x)^2 + x^2} \simeq 1 - \frac{2}{x} . \quad (3.86)$$

Le coefficient de réflexion est donc très voisin de 1, la différence s'exprimant facilement en fonction des caractéristiques du conducteur ou de la profondeur de peau δ :

$$1 - R = 2k_0\delta . \quad (3.87)$$

Plus grande est la conductivité, plus petite est la profondeur de peau et meilleure la qualité du miroir métallique.