Axiome de Martin

Prise de notes pour l'exposé de Charles

19 mars 2017

Quelques rappels

Dans toute la suite on considérera des ensembles ordonnés $(\mathbb{P}, \leq)$. On voit les éléments de $\mathbb{P}$ comme des "approximations" de certains objets. L'idée est qu'un élément est plus petit qu'un autre s'il est plus "précis" dans un certain sens.

Exemple:

- Étant donné un espace topologique $(E, \mathcal{T})$, l'ensemble des ouverts non-vides muni de l'inclusion $(\mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}, \subseteq)$ forme un ensemble ordonné. Dans cet exemple, on voit les ouverts comme des approximations des points de E.
- L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ partielles de domaines finis (de domaine de définition un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$) muni de $f \leq g$ ssi f prolonge g est un ensemble ordonné. Dans cet exemple, on voit les fonctions partielles comme des approximations des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition (Ensemble dense):
Soit $D \subseteq \mathbb{P}$. On dit que D est **dense** si:

$$\forall p \in \mathbb{P}, \exists q \in \mathbb{P} \text{ t.q } q \leq p \text{ et } q \in D$$

C'est-à-dire qu'étant donné un élément de $\mathbb{P}$, on peut trouver un autre élément plus précis qui appartient à D.

Exemple:
Soit U un ouvert d'un espace topologique.

On pose :

$$D_U = \{V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}, V \subseteq U\}$$

alors U est dense (au sens topologique usuel du terme) ssi D_U est dense.

On peut voir les éléments de $\mathbb{P}$ comme des conditions à vérifier. La notion de filtre est alors celle de conditions cohérentes entre elles :

Définition (Filtre):
Soit $G \subseteq \mathbb{P}$. On dit que G est un **filtre** si :

- $G \neq \emptyset$
- si $p \in G$ et si $q \geq p$ alors $q \in G$
- si $p, q \in G$ alors $\exists r \in G$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$

Exemple:
Dans le cas d'un espace topologique, si G est un filtre et si $U, V \in G$ alors $U \cap V$ est non-vide et appartient à G.
Dans le cas des fonctions partielles, si G est un filtre et si $f, g \in G$, alors f et g prennent les mêmes valeurs sur $dom(f) \cap dom(g)$ et $f \cup g \in G$.

Exemple:
Dans le cas d'un espace topologique, soit $x \in E$. Alors l'ensemble des voisinages ouverts de x :

$$\mathcal{F}_x = \{U \in \mathcal{T} | x \in U\}$$

est un filtre. Dans le cas de $\mathbb{R}$, l'ensemble des ouverts contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$ est un filtre. On ne peut pas "récupérer" un point de $\mathbb{R}$ avec ce filtre, c'est lié à la non-compacité de $\mathbb{R}$.
Dans le cas des fonctions partielles, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction totale, alors l'ensemble des restrictions de f à un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est un filtre. Si G est un filtre, alors pour tout entier n, les fonctions dans G prennent toutes la même valeur en n ou bien n'y sont pas définis. On récupère ainsi une fonction (pas forcément totale, mais qu'on peut étendre arbitrairement) qui étend chaque élément de G.

Axiome de Martin

Soit $\mathcal{D}$ une famille d'ensembles denses. On se demande s'il existe un filtre G tel que $\forall D \in \mathcal{D}$ on ait $D \cap G \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{D}$ est dénombrable, c'est vrai.

Exemple:
Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses. Alors avec $D_{U_n} = \{V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}, V \subseteq U_n\}$ on peut trouver un filtre G qui intersecte tous les D_{U_n}. Sous certaines hypothèses sur l'espace topologique (comme la compacité), on peut trouver un point x tel que $\mathcal{F}_x \subseteq G$, on retrouve ainsi le **théorème de Baire**.

Idée de la preuve:

On peut prouver légèrement mieux : on fixe un $p \in \mathbb{P}$, et on trouve un filtre G contenant p qui intersecte tous les D_n. On prend :

- $p_0 \in D_0$ avec $p_0 \leq p$, il en existe par densité de D_0,
- $p_1 \in D_1$ avec $p_1 \leq p_0$
- $p_2 \in D_2$ avec $p_2 \leq p_1$
- etc.

Alors $G := \{y \in \mathbb{P} | \exists n (y \geq p_n)\}$ est un filtre qui contient p et qui intersecte tous les D_n.

Sans hypothèse de dénombrabilité, ce n'est plus forcément vrai :

Exemple:
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on pose:

$$U_a = \{x \in \mathbb{R} | x \neq a\}$$

alors U_a est un ouvert dense mais:

$$\bigcap_{a \in \mathbb{R}} U_a = \emptyset$$

et cela donne donc un contre exemple à la propriété dans le cas où $|\mathcal{D}| = |\mathbb{R}|$.

Quelques rappels de théorie des cardinaux

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$. Si A et B sont deux ensembles finis de cardinal respectif n et m, alors l'ensemble des applications de A dans B est de cardinal m^n. On généralise la notation κ^λ à des cardinaux infinis.
On sait que :

$$\mathbb{R} \simeq \mathbb{P}(\mathbb{N}) \simeq \{f | f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$$

On a donc : $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

On sait par ailleurs qu'étant donné un cardinal κ, il existe un plus petit cardinal supérieur à κ. De manière plus générale, pour tout ensemble de cardinaux X, il existe un plus petit cardinal supérieur à chaque élément de X. On obtient une "suite" de cardinaux, indexées par les ordinaux :

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} \ldots$$

Une question naturelle est où se situe $2^{\aleph_0}$ dans cette "suite" ?

Il se trouve que c'est indécidable dans ZFC. On appelle hypothèse du continu l'énoncé suivant :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{CH}$$

Si on reprend la question :

Soit $\mathcal{D}$ une famille d'ensembles denses. Existe-t-il un filtre G tel que $\forall D \in \mathcal{D}, G \cap D \neq \emptyset$?
Alors on a vu que :

- Si $|D| = \aleph_0$ c'est vrai.
- Si $|D| = 2^{\aleph_0}$ c'est faux.

On se demande donc ce qui se passe si :

$$\aleph_0 < |D| < 2^{\aleph_0}$$

Exemple:
On considère l'ensemble des fonctions partielles à domaine fini de $\aleph_0$ dans $\aleph_1$.

On pose :

$$D_a = \{f \text{ t.q } a \in \text{Im}(f)\}$$

On a donc une famille d'ensembles denses $(D_a)_{a\in\aleph_1}$. Si G est un filtre tel que $G \cap D_a \neq \emptyset$ pour tout a, alors $f := \bigcup_{g\in G} g$ est une fonction surjective d'une partie de $\aleph_0$ dans $\aleph_1$, ce qui est impossible.

Remarque:
Il s'agit d'un certain point de vue de l'idée du *forcing*, où on "rajoute" un filtre qui intersecte tous les ensembles denses. Plus précisément, on suppose l'existence d'un modèle dénombrable M de ZFC. Si $\mathbb{P} \in M$, il n'existe qu'un nombre dénombrable d'ensembles denses dans $\mathbb{P}$ qui soit dans M. On peut donc construire un filtre G qui intersecte tous les ensembles denses appartenant à M. Or, le complémentaire d'un filtre est (en général) dense. Ceci montre que $G \notin M$. L'idée du forcing est de construire un modèle noté $M[G]$ qui contient M et G, qui contient les mêmes ordinaux que M et qui est "minimal". Dans l'exemple précédent, le filtre G donne une bijection entre ce que M pense être $\aleph_0$ et $\aleph_1$, on a "collapsé" $\aleph_1$: l'ordinal qui était $\aleph_1$ dans M est dénombrable dans $M[G]$.

On cherche à éviter ce phénomène de collapse.

Définition (Condition d'antichaîne dénombrable):
On dit que $\mathbb{P}$ est **ccc** (condition d'antichaîne dénombrable) si toute antichaîne est dénombrable,

une antichaîne étant une partie de $\mathbb{P}$ dont les éléments sont deux-à-deux incompatibles, deux éléments p, q étant dits incompatibles s'il n'existe pas de r tel que $r \leq p$ et $r \leq q$.

On définit donc étant donné un cardinal κ l'axiome de Martin associé :

Axiome de Martin MA(κ)

Pour tout $\mathbb{P}$ ccc et pour toute famille $\mathcal{D}$ d'ensembles denses de $\mathbb{P}$ tel que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ il existe un filtre G tel que $G \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$.

On a vu qu'on a :

- MA($\aleph_0$), même sans imposer la restriction ccc.
- $\neg$ MA($2^{\aleph_0}$)

On se demande ce qu'il se passe entre les deux et on va s'intéresser plus spécialement à MA($\aleph_1$).

On appelle axiome de Martin l'énoncé suivant :

$$\forall \kappa < 2^{\aleph_0}, MA(\kappa) \tag{MA}$$

Idée : Intuitivement, MA signifie que tous les cardinaux $< 2^{\aleph_0}$ se comportent comme $\aleph_0$.

Exemples et applications

Exemple:

- Si MA(κ) alors $\forall (U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ ouverts denses de $\mathbb{R}$ on a $\bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$ est dense.
- De même si MA(κ) et si les $(X_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurables de mesure nulle, alors on a $\bigcup_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ est de mesure nulle.
- Si les $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alors il existe g t.q $f_\alpha \leq^* g$ pour tout α. (On dit que $f \leq^* g$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tous les x sauf un nombre fini).

Remarque:
Pour le dernier point dans le cas dénombrable on construit g par extraction diagonale :

$$g(n) = \max_{i\leq n} f_i(n)$$

Exemple:
On sait que l'ordre usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est caractérisé par :

- $<$ est total
- $<$ est sans extrémités
- $<$ est séparable ($\exists P \subseteq \mathbb{R}, |P| \leq \aleph_0, P$ dense).
- dense ($\forall x < y \exists z, x < z < y$)
- complet (on a des inf et des sup)

Que se passe-t-il si l'on remplace la séparabilité par une condition d'antichaîne dénombrable, c'est-à-dire que toute famille d'intervalles non-vides deux-à-deux disjoints est dénombrable ?

Exemple: Hypothèse de Souslin
(SH): L'hypothèse de Souslin est que un tel ordre est isomorphe à celui sur $\mathbb{R}$.

On appelle droite de Souslin un ordre non isomorphe à $\mathbb{R}$ vérifiant ces propriétés.

On a :

$$\text{MA}(\aleph_1) \to \text{SH}$$

La démonstration se base sur des arbres. Formellement, en théorie des ensembles, un arbre est un ensemble partiellement ordonné $(T, \leq)$ tel que pour tout $x \in T$, l'ensemble des prédecesseurs de x, c'est-à-dire $\{y \in T | y \leq x\}$, est bien-ordonné par l'ordre induit. On peut voir les éléments de l'arbre (appelé noeud) comme des approximations des branches (les sous-ensembles totalements ordonnés maximaux pour l'inclusion).

Exemple:
L'arbre binaire complet infini, dans ce cas :

- un nœud correspond à une fonction $\{0, 1.., n\} \to \{0, 1\}$ pour un certain entier n : on choisit à chaque étape d'aller à gauche ou à droite,
- une branche correspond à une fonction $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$

Ceci permet de voir l'arbre binaire complet infini comme étant l'ensemble des fonctions d'un segment initial de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$, ordonné par l'inclusion.

Exemple:
On généralise l'exemple précédent à deux cardinaux quelconques κ, λ : à chaque étape, on a κ choix, et il y a λ étapes. Formellement,

- un nœud correspond à une fonction $\alpha \to \kappa$, avec $\alpha < \lambda$.
- une branche correspond à une fonction $\lambda \to \kappa$.

Un arbre de Souslin est un arbre qui vérifie :

- La hauteur est $\aleph_1$.
- Chaque antichaîne est dénombrable
- Toute branche est dénombrable, autrement dit il n'y a pas de branche de longueur $\aleph_1$, c'est-à-dire qui va "jusqu'au bout" de l'arbre.

Si $(S, <)$ est une droite de Souslin, on peut construire un arbre de Souslin de la manière suivante : on construit par récurrence transfinie des intervalles fermés non-vides $(I_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de S tels que pour tout α, I_α ne contient aucune extrémité d'un intervalle I_β avec $\beta < \alpha$. C'est toujours possible, car l'ensemble des extrémités des I_β, $\beta < \alpha$ est dénombrable donc n'est pas dense. On peut montrer que l'ensemble des I_α ordonné par l'inclusion est un arbre de Souslin. Ainsi, pour montrer que, sous $MA(\aleph_1)$, il n'existe pas de droite de Souslin, il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'arbre de Souslin. On veut appliquer $MA(\aleph_1)$ à un arbre de Souslin T et aboutir à une contradiction. T vérifie la ccc par définition. On aimerait que D_α, l'ensemble des noeuds de niveau $\geq \alpha$ soit dense. Ce n'est pas toujours le cas : pour résoudre ce problème, on "élague" l'arbre, on prend le sous-arbre T' formé des noeuds qui ont un nombre non dénombrable d'éléments supérieurs. Alors T' est un arbre de Souslin et, dans T', les D_α sont denses. Ainsi, il existe un filtre G qui intersecte tous les D_α. Ce filtre est une branche non-dénombrable, contradiction.

Autres exemples

Exemple: Problème de Whitehead

On a le théorème suivant:
Soit G un groupe abélien libre.
Alors $\forall \mathcal{B}$ abélien et $\forall \pi : \mathcal{B} \to G$ surjective et telle que $\ker(\pi) = \mathbb{Z}$ il existe une section, c'est-à-dire $\rho : G \to \mathcal{B}$ tel que $\pi\rho = id_G$.

On se demande alors si la réciproque est vraie (si tout groupe abélien vérifiant la propriété précédente est libre).

Shelah a montré que si MA($\aleph_1$), il existe un contre-exemple.

Exemple:

Soit B un Banach non séparable.

On se demande s'il existe un système biorthogonal de longueur $\aleph_1$ i.e des $(e_i)_{i\in I}$ dans B et des $(e_i^*)_{i\in I}$ dans B^* avec $|I| = \aleph_1$ et tels que:

$$e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$$

Une généralisation de l'axiome de Martin, appelé Maximum de Martin (MM) implique que c'est vrai.

Exemple: Ensembles analytiques

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un borélien et $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la projection canonique sur la première coordonnée.

A priori $\pi(A)$ n'est pas un borélien. On appelle de tels ensembles des **ensembles analytiques**. Plus généralement, un ensemble analytique est l'image d'un ensemble borélien par une application continue entre deux espaces polonais. On les note $\mathbf{\Sigma^1_1}$. Les complémentaires des analytiques, ou co-analytiques, sont notés $\mathbf{\Pi^1_1}$. Les images par des applications continues des co-analytiques sont notés $\mathbf{\Sigma^1_2}$, etc ... Ceci définit une hiérarchie de sous-ensembles des espaces polonais, appelé hiérarchie projective. L'étude de cette hiérarchie s'appelle la théorie descriptive des ensembles.

Que peut-on dire de tels ensembles , en terme de "régularité" ? Les propriétés importantes de régularités sont la Lebesgue-mesurabilité, la propriété de Baire, la propriété de l'ensemble parfait, la détermination du jeu associé, etc ... Il y a beaucoup de liens avec la théorie des grands cardinaux.

On a alors :

$$\text{MA}(\aleph_1) \to \text{ les } \mathbf{\Sigma^1_2} \text{ sont Lebesgue-mesurables}$$

Remarque:

On a :

$$\begin{aligned} &\text{CH} \to \text{MA} \\ &\text{MA} + \neg\,\text{CH consistant} \\ &\neg\,\text{MA consistant} \end{aligned}$$