

Mémoire de M2

Localisation d'Anderson et statistiques des valeurs propres

Raphael Ducatez

encadré par

Mathieu Lewin à l'université Paris Dauphine

4 septembre 2015

Table des matières

1	Présentation du modèle	3
1.1	Equation de Schrodinger	3
1.2	Discrétisation du modèle	3
1.2.1	Boites finies	3
1.3	Loi aléatoire	4
2	Mesurabilité et ergodicité	5
2.1	Espace de probabilité et application de translation	5
2.2	Ergodicité	5
2.3	Mesurabilité	5
2.3.1	Rappel de Théorie Spectral	5
2.3.2	Mesurabilité du spectre	6
3	Densité d'états intégrée	7
3.1	Densité d'états intégrée	7
3.2	Transformé de Laplace et chaîne de Markov	7
3.2.1	Formule de Feynman-Kac discret	7
3.2.2	L'influence du bord	8
3.2.3	Application du théorème de Birkhoff	9
4	Détermination du spectre et phénomène de queue de Lifshitz	11
4.1	Déterminer le spectre	11
4.2	Queue de Lifshitz	11
4.2.1	Condition de Neumann et de Dirichlet	12
4.2.2	Première inégalité pour la queue de Lifshitz	13
4.2.3	Deuxième inégalité pour la queue de Lifshitz	13
5	Quelques estimées techniques	16
5.1	Formule des résolvantes et applications	16
5.2	Estimée de Wegner	17
5.3	Estimée de Minami	18
5.4	Estimé de Combes Thomas	18

6	Moment fractionnaire et décroissance exponentielle	20
6.1	Initialisation dans les zones "queue de Lifshitz"	20
6.2	Propagation	21
7	Statistique Poissonienne	24
7.1	Division en sous boites	25
7.2	Processus de Poisson	27
A	ANNEXE : Théorie de Bloch-Floquet	29

Introduction

Ce que l'on appelle "Localisation d'Anderson" est un phénomène que prédit dans les années 50 le physicien Anderson lorsqu'il proposa un modèle pour décrire le mouvement des électrons dans un semi-conducteur [2]. Ce modèle a été largement étendu et est aujourd'hui également utilisé en optique et plus généralement dans l'étude des ondes. En deux mots, il s'agit de comprendre le comportement des solutions d'une équation différentielle linéaire en présence d'"aléatoire". Concernant les électrons, on étudie l'équation de Schrodinger, l'aléatoire est dû à la présence d'impuretés dans le semi-conducteur. En optique, on étudie les équations de Maxwell, l'aléatoire est dû à la non homogénéité de l'indice de réfraction du milieu. En l'absence d'aléatoire, dans un milieu présentant une certaine régularité : (homogène ou présentant une structure périodique), on peut montrer que les vecteurs propres de l'opérateur associé à l'équation (Schrodinger ou Maxwell) sont complètement "délocalisés", à savoir qu'ils occupent équitablement tout l'espace. De plus en considérant un système non borné, le spectre de cet opérateur sera absolument continu et l'onde diffusera à l'infini. En présence d'aléa, on prédit un comportement complètement différent : les vecteurs propres sont localisés dans l'espace, dans un système non borné le spectre sera purement ponctuel et l'onde restera essentiellement dans un domaine borné. C'est la "localisation d'Anderson". Ces deux régimes que l'on appelle parfois "métal" et "isolant" dépendent de la dimension du système et de l'intensité de l'aléa. Les physiciens pensent que le phénomène de localisation se produit quelque soit l'intensité de la perturbation dans les dimensions 1 et 2, et en dimension 3 sur les bords du spectre seulement. Du point de vue mathématique, il a été possible de démontrer les résultats pour la dimension 1. Mais en dimension 2, il n'existe de résultat seulement sur les bords du spectre. De plus il est en générale très difficile de démontrer qu'il n'y a pas de localisation et il n'y a pas de résultats rigoureux dans ce sens, sauf dans des situations très particulières.

Les premiers résultats en dimension supérieure sont dû à Frohlich et Spencer qui introduisirent une technique "multi-échelle" dans les années 80 [5]. Une méthode un peu plus simple mais moins puissante est aujourd'hui également utilisée celles des "moments fractionnaires" [1]. Pour le cas d'une dimension voir [3].

Dans ce mémoire, je présenterai le modèle d'Anderson ainsi que quelques unes de ses propriétés. J'introduirai ensuite la méthode des moments fractionnaire pour montrer une version faible de la localisation. Enfin, j'illustrerai ces résultats pour montrer un corollaire dû à Minami : que la statistique locale des valeurs propres converge vers une loi de Poisson [7]. Pour ce travail, je me suis beaucoup appuyé sur les articles [4] et [8].

1 Présentation du modèle

Nous présentons ici le modèle étudié.

1.1 Equation de Schrodinger

Le modèle d'Anderson a été proposé pour décrire le comportement d'un électron dans un milieu aléatoire. La mécanique quantique affirme qu'il faut pour cela résoudre l'équation de Schrodinger avec l'hamiltonien suivant :

$$Hu = -\Delta u + Vu, \quad (1)$$

où $-\Delta$ est le Laplacien $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$ et V le potentiel du milieu. Pour modéliser l'aspect aléatoire, on écrira $V = V_0 + V_\omega$ avec V_0 un potentiel déterministe que l'on supposera nul ou périodique et V_ω une réalisation d'un système aléatoire. On pourra écrire $H_0 = -\Delta + V_0$ l'opérateur non aléatoire, et $H = H_0 + V_\omega$.

H est un opérateur auto-adjoint (sur le bon domaine, à savoir H^2 avec condition au bord de Neumann ou Dirichlet) et on peut donc utiliser le théorème spectrale. Résoudre l'équation de Schrodinger consiste essentiellement alors à trouver les valeurs propres et les vecteur propres de H .

1.2 Discrétisation du modèle

Pour simplifier ce modèle, nous allons travailler dans \mathbb{Z}^d à la place de \mathbb{R}^d . Dans ce cas discret, $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad (-\Delta u)(n) = - \sum_{|m-n|=1} u(m) \quad (2)$$

et

$$(Vu)(n) = V(n)u(n) \quad (3)$$

Dans ce modèle discret, $-\Delta$ est un opérateur borné, et $\|-\Delta\| = 2d$.

1.2.1 Boîtes finies

Il sera utile de travailler sur Λ un sous ensemble fini connexe de \mathbb{Z}^d . Nous appellerons Λ_L le cube centré en 0 de côté $2L + 1$, $\Lambda_L(x)$ le cube centré en x de côté $2L + 1$, et H^Λ l'hamiltonien restreint à la boîte Λ , avec

$$\forall n \in \Lambda \quad (-\Delta u)(n) = - \sum_{|m-n|=1, m \in \Lambda} u(m). \quad (4)$$

Il existe différent choix pour définir le laplacien aux bords, voir plus loin (4.2.1).

Dans le cas d'une boîte finie, l'espace est de dimension finie et H^Λ est simplement une matrice symétrique.

1.3 Loi aléatoire

On supposera que pour chaque site n la loi du potentiel aléatoire $V_\omega(n)$ est indépendante de tous les autres sites de \mathbb{Z}^d et de même loi μ . Parmi les hypothèses sur la loi μ , on supposera que

- le support de μ est borné,
- μ admet une densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue qui est bornée,
- le support essentiel de μ est un intervalle.

Sous ces hypothèses, il est clair que H est un opérateur borné.

2 Mesurabilité et ergodicité

Nous montrons ici que le spectre de l'hamiltonien n'est pas aléatoire.

2.1 Espace de probabilité et application de translation

Sous les hypothèses précédentes, notre espace de probabilité est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = (\text{supp}(\mu)^{\mathbb{Z}^d})$, \mathcal{F} est la tribu borélienne produit, et $\mathbb{P} = \mu^{\otimes(\mathbb{Z}^d)}$. Cet espace est naturellement muni d'une application de décalage $T : (\mathbb{Z}^d, \Omega) \rightarrow \Omega$ défini par $T(n, \omega)(x) = \omega(x + n)$ qui laisse \mathbb{P} invariante.

Si on note \tilde{T} l'opérateur de décalage de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, défini par $(\tilde{T}(n, u))(x) = u(n + x)$, alors pour tout n appartenant au sous groupe de \mathbb{Z}^d laissant invariant V_0 , $\tilde{T}(n, \cdot)(H_0 + V_\omega)\tilde{T}(-n, \cdot) = H_0 + V_{T(n, \omega)}$.

2.2 Ergodicité

Cette invariance par translation va nous permettre d'affirmer que certaines propriétés ne sont plus aléatoires, à savoir quelles seront vrai avec probabilité soit 0 soit 1.

Proposition 2.1. \mathbb{P} est mélangeante.

Démonstration Soit A et B deux ensembles mesurables ne dépendant que d'un nombre fini de sites. Alors il existe n une translation telle que A et $T(n, B)$ ne dépendent que de sites différents et sont donc alors indépendants. $\mathbb{P}(A \cap T(n, B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(T(n, B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Passons maintenant au cas général. Soit A et B deux ensembles mesurables, et soit $\epsilon > 0$, alors il existe A' et B' qui ne dépendent que d'un nombre fini de sites tel que $\mathbb{P}((A \cup A') - (A \cap A')) < \epsilon$ et $\mathbb{P}((B \cup B') - (B \cap B')) < \epsilon$. Il existe donc n' tel que $\mathbb{P}(A' \cap T(n', B')) = \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B')$ et donc $|\mathbb{P}(A \cap T(n', B)) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| < 4\epsilon \square$

En corollaire, \mathbb{P} est ergodique. Tout ensemble mesurable T -invariant aura donc une probabilité soit 0 soit 1. Nous allons appliquer cette propriété au spectre de l'opérateur.

2.3 Mesurabilité

Pour utiliser l'ergodicité montrée précédemment, il convient de prouver la mesurabilité des ensembles que l'on considère.

2.3.1 Rappel de Théorie Spectral

Théorème 2.1 (Théorème spectral). Soit H un opérateur autoadjoint de $l^2(\mathbb{Z}^d)$, alors il existe une suite de mesure sur \mathbb{R} , $m_1, m_2, \dots, m_r, \dots$ et une application unitaire ψ de $l^2(\mathbb{Z}^d)$ dans $\bigoplus_r l^2(m_r)$ tel que $\forall u \in l^2(\mathbb{Z}^d), \forall i \in [1, r], \forall \lambda \in \mathbb{R} \psi(Hu)_i(\lambda) = \lambda \psi(u)_i(\lambda)$.

Chaque m_r peut être décomposé d'une unique manière comme une mesure ponctuelle $m_{r,p}$, une mesure singulière $m_{r,s}$ et une mesure continue par rapport la mesure de Lebesgue $m_{r,c}$. On appellera le spectre Σ (respectivement le spectre ponctuel Σ_p , le spectre singulier Σ_s , le spectre continu Σ_c) de H l'union du support essentiel de ces mesures m_r (respectivement $m_{r,p}$, $m_{r,s}$, $m_{r,c}$).

2.3.2 Mesurabilité du spectre

Proposition 2.2. *Soit I un intervalle, les ensembles $\{\omega : I \cap \Sigma_*(\omega) = \emptyset\}$ pour $(* = , p, s, c)$ sont mesurables.*

Démonstration : En fait, tout peut se déduire des relations entre les H , $(H - \lambda)^{-1}$, $E_H(I)$, avec E_H la partition de l'unité et I un intervalle de \mathbb{R} . Commençons par remarquer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $(H - \lambda)^{-1}$ est mesurable car continue en chaque $V(n)$. En effet, notons $(\delta_n u)(x) = u(x)$ si $x = n$ et 0 sinon. Par la formule de la résolvante $(H_{V(n)=a} - \lambda)^{-1} - (H_{V(n)=b} - \lambda)^{-1} = (H_{V(n)=a} - \lambda)^{-1}(b - a)\delta_n(H_{V(n)=b} - \lambda)^{-1}$. Puis d'après la formule $E_H(I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_I (H - t + i\epsilon)^{-1} dt$, $E_H(I)$ est mesurable. On en déduit alors la mesurabilité des ensembles précédent grâce aux définitions (toute quantification faite sur les entiers et ϕ_n dense dans l'espace de Hilbert) :

$$I \cap \Sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n(\phi_n, E_H(I)\phi_n) \neq 0 \quad (5)$$

$$I \cap \Sigma_p \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n \exists q, \forall m \exists a(\phi_n, E_H(I \cap [\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}])\phi_n) > \frac{1}{q} \quad (6)$$

$$I \cap \Sigma_s \cup \sigma_{pp} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n, \sup_{a,m} 2^m(\phi_n, E_H(I \cap [\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}])\phi_n) = \infty \quad (7)$$

□

Avec la mesurabilité et l'ergodicité, on peut en déduire le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Le spectre (purement ponctuel, absolument continu, singulier) n'est pas aléatoire.*

Remarque : Si l'ensemble d'adhérence des valeurs propres est connu, la valeur de chaque valeur propre reste elle par contre aléatoire.

3 Densité d'états intégrée

Nous souhaiterions maintenant connaître asymptotiquement le nombre de valeurs propres dans un intervalle. Pour cela nous définissons la "densité d'états intégrée".

3.1 Densité d'états intégrée

Soit Λ une boîte de taille finie et nous noterons $|\Lambda|$ le volume. Alors H^Λ est diagonalisable et admet $|\Lambda|$ valeurs propres. On définit alors une mesure de probabilité ν_{H^Λ} sur \mathbb{R} :

$$\nu_{H^\Lambda} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \delta_{\lambda_i} \quad (8)$$

où λ_i sont les valeurs propres. D'une manière équivalente $\nu_{H^\Lambda}(A) = \frac{1}{|\Lambda|} |\{\lambda_i \text{ valeur propre de } H^\Lambda : \lambda_i \in A\}|$. La transformée de Laplace de cette mesure est donnée par $\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} e^{-t\lambda_i} = \frac{1}{|\Lambda|} \text{Tr}(e^{-tH^\Lambda})$. Nous allons montrer qu'il existe une mesure ν , telle que \mathbb{P} presque-surement, ν_{H^Λ} converge vaguement vers N .

Remarque : Comme le potentiel est borné, la transformée de Laplace est toujours bien définie.

3.2 Transformé de Laplace et chaîne de Markov

On adapte ici la formule de Feynman-Kac à notre modèle discret.

3.2.1 Formule de Feynman-Kac discret

(appellation personnelle)

Définition de la Chaîne de Markov Soit $X : (\Omega, t)$, la chaîne de Markov défini de la manière suivante sur \mathbb{Z}^d : le temps tel que $X(t)$ reste sur place suit une loi exponentiel de paramètre $2d$, lorsqu'elle doit changer, elle saute d'une manière indépendante et uniforme sur l'une des cases adjacentes.

Proposition 3.1 (Feynman-Kac discret).

$$\mathbb{E}_{X(0)=x}(1_{X(0)=x, X(t)=y} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) = (y, e^{-t(H+2dI_d)} x) \quad (9)$$

Démonstration La formule est vraie pour $t = 0$: les deux cotés de l'égalité valent $\delta_{x,y}$. Notons $f(x, y, t)$ le terme de gauche. Nous vérifions que f vérifie la même équation différentielle que le

terme de droite. On a :

$$\begin{aligned}
& f(x, y, t + \delta t) \\
&= \mathbb{E}_{X(0)=x} \left(\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t+\delta t)=y} \mathbf{1}_{\text{un seul saut dans } [t; t + \delta t]} e^{-\int_0^{t+\delta t} V(X(s)) ds} \right) \\
&+ \mathbb{E}_{X(0)=x} \left(\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t+\delta t)=y} \mathbf{1}_{\text{il n'y a pas eu de saut dans } [t; t + \delta t]} e^{-\int_0^{t+\delta t} V(X(s)) ds} \right) + O(\delta t^2) \\
&= \sum_{|z-y|=1} \mathbb{E}_{X(0)=x} \left(\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t)=z, X(t+\delta t)=y} \mathbf{1}_{\text{un seul saut dans } [t; t + \delta t]} e^{-\int_0^{t+\delta t} V(X(s)) ds} \right) \\
&+ \mathbb{E}_{X(0)=x} \left(\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t+\delta t)=y} \mathbf{1}_{\text{pas de saut dans } [t; t + \delta t]} e^{-\int_0^{t+\delta t} V(X(s)) ds} \right) + O(\delta t^2) \\
&= \sum_{|z-y|=1} \mathbb{E}_{X(0)=x} \left(\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t)=z} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds} \right) \delta t \\
&+ (1 - 2d\delta t)(1 - \delta t V(y)) \mathbb{E}_{X(0)=x} (\mathbf{1}_{X(0)=x, X(t)=y} e^{-\int_0^{t+\delta t} V(X(s)) ds}) + O(\delta t^2) \\
&= f(x, y, t) - \delta t \left(\sum_{|y-z|=1} f(x, z, t) + (2d + V(y)) f(x, y, t) \right) + O(\delta t^2)
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\frac{d}{dt} f(x, y, t) = -(H + 2dI_d) f(x, y, t) \quad (10)$$

où l'opérateur agit sur la deuxième variable. Par théorème de Cauchy Lipschitz, les deux termes sont égaux pour tout t .

3.2.2 L'influence du bord

On définit de la même manière une chaîne de Markov $X^\Lambda(t)$ qui correspond à l'opérateur H^Λ , telle que si $X(t)$ sort de Λ , le processus s'arrête. Il suffit maintenant de vérifier que pour $x, y \in \Lambda$, (10) reste vrai. X^Λ et X diffèrent par leur comportement au bord de Λ . Pour t fixé et pour une boîte suffisamment grande, ces deux marches aléatoires issues d'un même point suffisamment éloigné du bord, seront identiques avec une probabilité proche de 1. Notons \mathbb{Q} , la probabilité associée à ces lois. Alors

- Le nombre S_t de saut en temps t suit une loi de Poisson de paramètre $2dt$, $\mathbb{Q}(S_t = n) = \frac{(2dt)^n}{n!} e^{-2dt}$;
- Du au facteur $\frac{1}{n!}$, $\mathbb{Q}(S_t > M)$ décroît plus vite que toute exponentielle en M .
- En particulier, $|\Lambda|^2 \mathbb{Q}(S_t > \log(|\Lambda|)) \rightarrow 0$. Aussi la probabilité qu'il existe un point dans Λ et que la marche aléatoire issue de ce point réalise $\log(|\Lambda|)$ sauts, converge vers 0 lorsque $|\Lambda|$ tend vers l'infini.
- Conditionnellement à ce que les marches aléatoires ne réalisent au plus que $\log(|\Lambda|)$ sauts, les lois des marches aléatoires X et X^Λ issues d'un point à une distance $\log|\Lambda|$ du bords sont identiques.
- Il y a un $\mathcal{O}(L^{d-1} \log(L))$ points qui ne sont pas "près" du bord pour Λ_L (le cube de taille $2L + 1$) ;
- $e^{\int_0^t \|V\|_\infty ds} < \infty$.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Lambda_L|} \text{Tr}(e^{-t(H^{\Lambda_L} + 2dI_d)}) \\
&= \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} (x, e^{-tH^{\Lambda_L}} x) \\
&= \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} \mathbb{E}_{X^{\Lambda_L}(0)=x} (1_{X^{\Lambda_L}(0)=x, X^{\Lambda_L}(t)=x} e^{-\int_0^t V(X^{\Lambda_L}(s)) ds}) \\
&= \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L, d(x, \partial \Lambda_L) > \log L} \mathbb{E}_{X^{\Lambda_L}(0)=x} (1_{X^{\Lambda_L}(0)=x, X^{\Lambda_L}(t)=x} e^{-\int_0^t V(X^{\Lambda_L}(s)) ds}) \\
&+ \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L, d(x, \partial \Lambda_L) \leq \log L} \mathbb{E}_{X^{\Lambda_L}(0)=x} (1_{X^{\Lambda_L}(0)=x, X^{\Lambda_L}(t)=x} e^{-\int_0^t V(X^{\Lambda_L}(s)) ds}) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{\log(L)}{L}\right) + \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L, d(x, \partial \Lambda_L) > \log L} \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) \\
&+ \mathcal{O}(e^{\int_0^t \|V\|_\infty ds} \mathbb{Q}(S_t > \log(L)) |\Lambda_L|^2)
\end{aligned}$$

En conclusion, on a trouvé

$$\lim_{\Lambda_L \rightarrow \mathbb{Z}^d} \left[\frac{1}{|\Lambda_L|} \text{Tr}(e^{-tH^{\Lambda_L}}) - \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) \right] = 0 \quad (11)$$

Remarquons que $\omega \rightarrow \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V_0 + V_\omega(X(s)) ds})$ est une variable aléatoire bornée donc intégrable. Appelons $Y(\omega, x)$ cette application.

3.2.3 Application du théorème de Birkhoff

Notons \mathcal{G} le sous groupe laissant invariant V_0 et \mathcal{V}_0 sa cellule base.

Proposition 3.2. *\mathbb{P} presque surement*

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) \rightarrow \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} \sum_{x \in \mathcal{V}_0} \mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) \quad (12)$$

quand $L \rightarrow \infty$

Démonstration On a

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} Y(\omega, x) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_0} \sum_{n \in \Lambda \cap \mathcal{G}} Y(T(n, \omega), x) \quad (13)$$

D'après le théorème de Birkhoff, \mathbb{P} presque surement

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} \mathbb{E}_{X(0)=x} (1_{X(0)=x, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}) \rightarrow \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} \sum_{x \in \mathcal{V}_0} \mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{X(0)=0} (1_{X(0)=0, X(t)=0} e^{-\int_0^t V(X(s)) ds}).$$

□

On peut alors en déduire le théorème :

Théorème 3.1. *\mathbb{P} presque surement ν_{Λ_L} converge en loi.*

Démonstration \mathbb{P} presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{Q}$, la transformé de Laplace de paramètre t , converge. Nous appellerons N cette loi. En particulier pour tout point non singulier : $N(A) = \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\Lambda_L}[-\infty; A]$.

4 Détermination du spectre et phénomène de queue de Lifshitz

Dans notre modèle, il est possible de déterminer explicitement le spectre.

4.1 Déterminer le spectre

Appelons Σ_0 le spectre de $H_0 = -\Delta + V_0$. On peut démontrer (voir ANNEXE) que Σ_0 est une union d'intervalles. Appelons Σ le spectre de H .

Proposition 4.1. $\Sigma \subset \Sigma_0 + \text{support}(\mu)$

Démonstration Appelons m le milieu du $\text{support}(\mu)$. Quitte à remplacer V_0 et V_ω par $V_0 + m$ et $V_\omega - m$, on peut supposer que le support de μ est l'intervalle centré en 0, $[-K; K]$. V_ω est un opérateur de norme inférieur ou égale à K . Donc par la théorie de perturbation, $\Sigma \subset \Sigma_0 + m + [-K; K] = \Sigma_0 + \text{support}(\mu)$.

Nous allons montrer que nos hypothèses "IID" et "le support est un intervalle" impliquent l'égalité.

Lemme 4.1 (Loi 0-1). *Soit Λ_L la boîte fini. Soit W une réalisation du potentiel aléatoire à valeur sur Λ_L , $\epsilon > 0$. Alors, \mathbb{P} presque surement, il existe $x \in \mathbb{Z}^d$, tel que $\|V_\omega(\cdot - x) - W(\cdot)\|_{L^\infty(\Lambda_L)} < \epsilon$.*

Démonstration T est ergodique.

Proposition 4.2. $\Sigma_0 + \text{support}(\mu) \subset \Sigma$

Démonstration Soit λ une valeur propre de H_0 , soit $a \in \text{support}(\mu)$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe ϕ_0 un fonction de $l^2(\mathbb{Z}^d)$ de norme 1 à support compact telle que $\|(H_0 - \lambda)\phi_0\| < \epsilon$. On va supposer que le support est inclus dans Λ_L . D'après la loi 0-1, il existe $x \in \mathcal{G}$ tel que $\|V_\omega(\cdot - x) - a\|_{L^\infty(\Lambda_L)} < \epsilon$. Par invariance par translation de l'opérateur H_0 , $\|(H_0 - \lambda)\phi_0(\cdot - x)\| < \epsilon$, donc $\|(H - \lambda - a)\phi_0(\cdot - x)\| < \|(H_0 - \lambda)\phi_0(\cdot - x)\| + \|(V_\omega(\cdot - x) - a)\phi_0\| < 2\epsilon$. Donc $d(\lambda + a, \Sigma) < 2\epsilon$. En conclusion, $\Sigma_0 + \text{support}(\mu) \subset \Sigma$ car le spectre est fermé.

Pour conclure, nous avons prouvé que $\Sigma_0 + \text{support}(\mu) = \Sigma$

La pertinence "physique" d'un tel résultat est tout de même discutable . En effet la loi 0-1 nécessite une suite de taille exponentiellement grande. Ici cela aura des conséquences sur la densité intégrée des valeurs propres, en particulier sur les bord du spectre ou il y aura une décroissance exponentiel. Le phénomène est appelé queue de Lifshitz.

4.2 Queue de Lifshitz

Introduction heuristique Dans la preuve précédente, on pourrait se demander quelle est la taille minimum du support compact de ϕ_0 . Le physicien Lifshitz proposa l'argument suivant [6] : les première valeurs propres du Laplacien dans un cube de taille L sont de l'ordre de $1/L^2$. au minimum du spectre sur un écart d'énergie ϵ il faudrait donc une boîte de taille $L = 1/\sqrt{\epsilon}$. La probabilité d'obtenir le bon potentiel est exponentiellement petit en la taille de la boîte soit L^d soit $1/\epsilon^{\frac{d}{2}}$. Dans cette partie nous rendons cette approche rigoureuse.

Nous allons montrer le théorème suivant

Théorème 4.1 (queue de Lifshitz). *Soit E_0 le minimum du Spectre Σ et soit $E' > E_0$. Alors*

$$\lim_{E' \rightarrow E_0} \frac{\log(|\log(N(E'))|)}{\log(|E' - E_0|)} = \frac{d}{2} \quad (14)$$

4.2.1 Condition de Neumann et de Dirichlet

Soit un domaine $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fini, on peut définir le laplacien discret au bord de plusieurs manières :

$$(-\Delta^\Lambda u)(n) = - \sum_{|m-n|=1, m \in \Lambda} u(m), \quad (15)$$

$$(-\Delta^{\Lambda, N} u)(n) = - \sum_{|m-n|=1, m \in \Lambda} u(m) - \sum_{|m-n|=1, m \notin \Lambda} u(n) \quad (\text{Neumann}), \quad (16)$$

$$(-\Delta^{\Lambda, D} u)(n) = - \sum_{|m-n|=1, m \in \Lambda} u(m) + \sum_{|m-n|=1, m \notin \Lambda} u(n) \quad (\text{Dirichlet}). \quad (17)$$

Si Λ est un rectangle, on peut également définir des conditions périodiques. On note d^T la distance sur le tore associé au rectangle.

$$(-\Delta^{\Lambda, D} u)(n) = - \sum_{d^T(m, n)=1, m \in \Lambda} u(m) \quad (\text{Périodique}) \quad (18)$$

Nous noterons $H^{\Lambda, P}$, $H^{\Lambda, D}$, $H^{\Lambda, N}$, H^Λ , les hamiltoniens associés. Ainsi que ν_{H^Λ} , $\nu_{H^{\Lambda, N}}$, $\nu_{H^{\Lambda, D}}$, les mesures spectrales associées.

Lemme 4.2. *Soit Λ_1 , Λ_2 deux domaines disjoints. Alors au sens des opérateurs,*

$$(-\Delta^{\Lambda_1, N}) \leq (-\Delta^{\Lambda_1}) \leq (-\Delta^{\Lambda_1, D}) \quad (19)$$

$$(-\Delta^{\Lambda_1, N}) + (-\Delta^{\Lambda_2, N}) \leq (-\Delta^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2, N}) \quad (20)$$

$$(-\Delta^{\Lambda_1, D}) + (-\Delta^{\Lambda_2, D}) \geq (-\Delta^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2, D}) \quad (21)$$

Démonstration $u(n)^2 + u(m)^2 \geq 2u(n)u(m)$.

Corolaire 4.1.

$$\nu_{H^{\Lambda, D}}(-\infty, A) \leq \nu_{H^\Lambda}(-\infty, A) \leq \nu_{H^{\Lambda, N}}(-\infty, A) \quad (22)$$

Considérons, le découpage d'un grand cube de taille NL en $(2N+1)^d$ cubes de taille L .

$$\Lambda_{NL} = \bigcup_{\bar{n} \in [-N; N]^d} \Lambda_L((2L+1)\bar{n}) \quad (23)$$

Alors on obtient le

Corolaire 4.2.

$$\mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, D}}(-\infty, A)) \leq \nu(A) \leq \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, N}}(-\infty, A)) \quad (24)$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{\bar{n} \in [-N; N]^d} \nu_{H^{\Lambda_L(\bar{n}), D}}(-\infty, A) &\leq \nu_{H^{\Lambda_{NL}, D}}(-\infty, A), \\ \nu_{H^{\Lambda_{NL}, D}}(-\infty, A) &\leq \nu_{H^{\Lambda_{NL}, N}}(-\infty, A), \\ \nu_{H^{\Lambda_{NL}, N}}(-\infty, A) &\leq \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{\bar{n} \in [-N; N]^d} \nu_{H^{\Lambda_L(\bar{n}), N}}(-\infty, A), \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, D}}(-\infty, A)) \leq \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_{NL}, D}}(-\infty, A)) \leq \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_{NL}, N}}(-\infty, A)) \leq \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, N}}(-\infty, A)). \quad (25)$$

On conclut grâce aux résultats de la partie précédente que $\nu_{H^{\Lambda_{NL}, D}}(-\infty, A) \rightarrow N(A)$.

4.2.2 Première inégalité pour la queue de Lischitz

Quitte à ajouter une constante, on va supposer ici que le support de μ (la loi du potentiel) est $[0; A]$. Soit un opérateur O , on notera $E_0(O)$ la plus petite valeur propre.

Proposition 4.3. *Soit E_0 le minimum du Spectre Σ et soit $E' > E_0$. Alors*

$$\lim_{E' \rightarrow E_0} \inf \frac{\log(|\log(N(E'))|)}{\log(|E' - E_0|)} \geq \frac{d}{2}. \quad (26)$$

Démonstration Nous étudions $H_0 = -\Delta + V_0$ non aléatoire et notons que $E_0 = E_0(H_0^{\Lambda_L, N})$. D'après la théorie des ondes de Bloch rappelée en appendice, il existe C tel que

$$|E_0(H_0^{\Lambda_L, D}) - E_0(H_0^{\Lambda_L, N})| < \frac{C}{L^2}. \quad (27)$$

On pose $L = \frac{\sqrt{|E' - E_0|}}{2\sqrt{C}}$, de telle sorte que $E_0(H_0^{\Lambda_L, D}) \leq E_0 + \frac{1}{2}(E' - E_0)$.

Considérons l'évènement $[\forall x \in \Lambda_L, V_\omega < \frac{1}{2}(E' - E_0)]$. Conditionné à cet évènement, $E_0(H_0^{\Lambda_L, D}) \leq E'$. On a alors

$$\begin{aligned} N(E') &\geq \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, D}}(-\infty, E')) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|} \mathbb{P}([\forall x \in \Lambda_L, V_\omega < \frac{1}{2}(E' - E_0)]) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|} \mu([0; \frac{1}{2}(E' - E_0)]^{L^d}) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|} e^{\frac{\log(\mu([0; \frac{1}{2}(E' - E_0)]))}{C^{\frac{d}{2}}}} (E' - E_0)^{\frac{d}{2}} \end{aligned}$$

On conclut alors en remarquant que $\log(\mu([0; \frac{1}{2}(E' - E_0)]))$ est croissante en E' et négative.

4.2.3 Deuxième inégalité pour la queue de Lischitz

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 4.2. Soit E_0 le minimum du Spectre Σ et soit $E' > E_0$. Alors

$$\limsup_{E' \rightarrow E_0} \frac{\log(|\log(N(E'))|)}{\log(|E' - E_0|)} \leq \frac{d}{2} \quad (28)$$

Soit ϕ_0 le vecteur propre de $H_0^{\Lambda_L, N}$ de plus petite valeur propre. Soit V_ω une réalisation du potentiel sur Λ_L , et soit $H^{\Lambda_L, N} = H_0^{\Lambda_L, N} + V_\omega$.

Proposition 4.4. Pour L suffisamment grand, on a

$$\text{soit } E_0(H^{\Lambda_L, N}) - E_0(H_0^{\Lambda_L, N}) \geq \frac{1}{4\|V_\omega\|^2} (\phi_0, V_\omega \phi_0) |E_1(H_0^{\Lambda_L, N}) - E_0(H_0^{\Lambda_L, N})|, \quad (29)$$

$$\text{soit } E_0(H^{\Lambda_L, N}) - E_0(H_0^{\Lambda_L, N}) \geq \frac{1}{2} |E_1(H_0^{\Lambda_L, N}) - E_0(H_0^{\Lambda_L, N})|. \quad (30)$$

Démonstration On pose $H(t) = H_0 + tV_\omega$ pour $t \in [0; 1]$. On note $E_i(t)$ et $\phi_i(t)$ les i -ème valeurs propres et vecteurs propres. Commençons par quelques estimées :

$$\frac{d}{dt} E_0(t) = (\phi_0(t), V_\omega \phi_0(t)) \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_0(t) = \sum_i \frac{(\phi_i(t), V_\omega \phi_0(t))}{E_i(t) - E_0(t)} \phi_i(t) \quad (32)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} E_0(t) = 2 \sum_i \frac{|(\phi_0(t), V_\omega \phi_i(t))|^2}{E_i(t) - E_0(t)} \quad (33)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} E_0(t) \leq 2 \sum_i \frac{|(\phi_0(t), V_\omega \phi_i(t))(\phi_i(t), V_\omega \phi_0(t))|}{E_i(t) - E_0(t)} \quad (34)$$

$$\leq 2 \frac{|(\phi_0(t), V_\omega^2 \phi_0(t))|}{E_1(t) - E_0(t)} \quad (35)$$

Supposons que pour tout $t \in [0; 1]$: $E_0(t) - E_0(0) < \frac{1}{2}(E_1(0) - E_0(0))$. Comme E_0 est croissant du à la positivité de V_ω , il suffit de montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que la première inégalité soit vraie. $E_1(t)$ est croissante, donc $E_1(t) - E_0(t) > E_1(0) - E_0(t) > \frac{1}{2}(E_1(0) - E_0(0))$ et

$$\frac{d^2}{dt^2} E_0(t) \leq 4 \frac{\|V_\omega\|^2}{E_1(0) - E_0(0)}, \quad (36)$$

$$E_0(t) - E_0(0) \geq (\phi_0(0), V_\omega \phi_0(0))t - 2 \frac{\|V_\omega\|^2}{|E_1 - E_0|} t^2 \quad (37)$$

En particulier pour $t = \frac{(\phi_0(0), V_\omega \phi_0(0)) |E_1 - E_0|}{4\|V_\omega\|^2}$, $t \in [0, 1]$ pour L suffisamment grand et $E_0(t) - E_0(0) \geq \frac{1}{4\|V_\omega\|^2} (\phi_0, V_\omega \phi_0) |E_1 - E_0|$. \square

Nous montrons maintenant que $(\phi_0(0), V_\omega \phi_0(0))$ n'est pas petit avec une forte probabilité.

Soit $v > 0$ dans le support de μ , on pose $\widetilde{V}_\omega = v1_{V_\omega > v}$. Remarquons que si le théorème est vrai pour \widetilde{V}_ω alors il est vrai pour V_ω car $\widetilde{V}_\omega < V_\omega$.

Proposition 4.5. Il existe $\lambda > 0$ et $\nu > 0$ tel que

$$\mathbb{P}((\phi_0(0), V_\omega \phi_0(0)) < \lambda) \leq e^{-\nu L^d} \quad (38)$$

Démonstration Soit $A = [x \in \Lambda_L : |\phi_0(0)(x)|^2 > \frac{1}{2|\Lambda_L|}]$. D'après la théorie de Bloch, il existe C tel que $|A| > C|\Lambda_L|$. Alors $(\phi_0, \widetilde{V}_\omega \phi_0) \geq \frac{v}{2|\Lambda_L|} |[x \in A : V_\omega(x) > v]|$. En particulier, on peut poser

$$m' = \frac{C}{|A|} |x \in A \text{ et } V_\omega(x) > v|$$

Les V_ω sont *IID* et, par la loi forte des grands nombres, m' converge lorsque $L \rightarrow \infty$ vers $C\mathbb{E}(\widetilde{V}_\omega)$.

Par le théorème de Cramer, pour tout $\lambda < vC\mathbb{E}(\widetilde{V}_\omega)$ il existe $\nu > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left((\phi_0(0), V_\omega \phi_0(0)) > \lambda\right) \leq \mathbb{P}\left(m' < \frac{\lambda}{v}\right) \leq O(e^{-\nu|A|}) = O(e^{-\nu' L^d}).$$

Fin de la démonstration Pour conclure la démonstration de la proposition, il existe C' tel que $E_1 - E_0 > \frac{C'}{L^2}$. On pose $L^2 = C' \frac{\lambda}{\|V_\omega\|^2 |E' - E_0|}$ et on obtient

$$\begin{aligned} N(E') &< \mathbb{E}(\nu_{H^{\Lambda_L, N}}(-\infty, E')) \\ &< \mathbb{P}(E_0(H^{\Lambda_L, N}) < E') \\ &< \mathbb{P}((\phi_0, V_\omega \phi_0) < \frac{L^2 \|V_\omega\|^2}{C'} |E' - E_0|) \\ &< e^{-\nu L^d} \\ &< e^{-\nu' |E' - E_0|^{-\frac{d}{2}}} \end{aligned}$$

Remarques :

- La démonstration ici se fait proche du minimum du spectre, mais elle peut être adaptée à n'importe quelle zone à la limite d'une bande du spectre.
- Le résultat reste valide si la valeur de V_ω est fixée sur un nombre fini de points, il suffit de retirer ces points à l'ensemble A .

On peut étendre ce résultat à une boîte plus grande. $\Lambda_{NL} = \bigcup_{n \in [-N; N]^d} \Lambda_L(n(2L+1))$. Par la propriété de croissance des conditions de Neumann,

$$E_0(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0}^{\Lambda_{NL}, N}) \geq \min_{n \in [-N; N]^d} E_0(H^{\Lambda_L(n(2L+1)), N})$$

et

$$\mathbb{P}((E_0(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0}^{\Lambda_{NL}, N}) - E_0) < \frac{C}{L^2}) < (2N+1)^d e^{-\nu' L^d}$$

On choisit $N = L^\alpha$, $\alpha > 1$, $\beta = \frac{2}{1+\alpha}$ et $L' = L^{1+\alpha}$ et alors

$$\mathbb{P}((E_0(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0}^{\Lambda_{L'}, N}) - E_0) < \frac{C}{L'^\beta}) < L'^d e^{-\nu' L'^{\frac{\beta d}{2}}}. \quad (39)$$

5 Quelques estimées techniques

5.1 Formule des résolvantes et applications

La formule suivante est omniprésente dans la suite, elle est le principal outil algébrique pour l'étude de ce modèle.

Lemme 5.1 (Formule des résidus). *Soit A, B deux opérateurs linéaires tel que A et $(A + B)$ sont inversibles alors*

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1} \quad (40)$$

Application 1 : variation du potentiel sur un site Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Im(\lambda) > 0$. On note δ_x la fonction qui vaut 1 en x et 0 partout ailleurs. Elle se comporte comme un projecteur. On a alors

$$\begin{aligned} & (\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} + V_\omega(x)\delta_x - \lambda)^{-1}\delta_x) \\ &= (\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} - \lambda)^{-1}\delta_x) - \\ & V_\omega(x)(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} - \lambda)^{-1}\delta_x)(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} + V_\omega(x)\delta_x - \lambda)^{-1}\delta_x) \end{aligned}$$

On en déduit la formule :

Corolaire 5.1 (Perturbation sur un site).

$$(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} + V_\omega(x)\delta_x - \lambda)^{-1}\delta_x) = \frac{1}{(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} - \lambda)^{-1}\delta_x)^{-1} + V_\omega(x)} \quad (41)$$

Remarque : le terme de gauche est borné par $\Im(\lambda)^{-1}$. En choisissant $V_\omega(x)$ de tel sorte qu'il annule la partie réelle du deuxième terme, on en déduit que $\Im((\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0} - \lambda)^{-1}\delta_x)^{-1}) \geq \Im(\lambda)$.

Application 2 : On peut généraliser la formule précédente pour la variation du potentiel sur plusieurs sites. Soit P un projecteur tel que $B = PBP$. Alors

$$P(A + B)^{-1}P = PA^{-1}P - PA^{-1}PPBPP(A + B)^{-1} \quad (42)$$

et donc

$$P(A + B)^{-1}P = ((PA^{-1}P)^{-1} - B)^{-1} \quad (43)$$

Où ici les ".⁻¹" du terme de gauche sont l'inverse pour les opérateurs restreints à $Im(P)$.

On peut généraliser (41), en appliquant plusieurs fois la formule des résolvantes.

Lemme 5.2. *Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^{\frac{d}{2}}$. Soit $u, v \in \mathbb{Z}^{\frac{d}{2}}$ Alors Il existe une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(V_\omega(x_1), V_\omega(x_2) \dots)$, dont les coefficients ne dépendent que des $(H_{\forall i V_\omega(x_i)=0} - \lambda)^{-1}$, telle que*

$$(\delta_u, (H - \lambda)^{-1}\delta_v) = F(V_\omega(x_1), V_\omega(x_2), \dots, V_\omega(x_n)). \quad (44)$$

Pour simplifier les notations, on notera $G_\lambda(u, v) = (\delta_u, (H - \lambda)^{-1}\delta_v)$. Par exemple :

$$G_\lambda(u, v) = G_{\lambda, V_\omega(x)=0}(u, v) - \frac{V_x G_{\lambda, V_\omega(x)=0}(u, x) G_{\lambda, V_\omega(x)=0}(x, v)}{1 + G_{\lambda, V_\omega(x)=0}(x, x) V_x}. \quad (45)$$

Application 3 "principe de Huygens-Fresnel" (appellation personnelle) ;
 Soit Λ un domaine, on appelle Γ^Λ l'opérateur sur la frontière du domaine $(\Gamma^\Lambda u)(n) = -\sum_{|m-n|=1, m \notin \Lambda} u(m)$
 si $n \in \Lambda$, $-\sum_{|m-n|=1, m \in \Lambda} u(m)$ si $n \in \Lambda^c$. On a alors :

$$H = H^\Lambda + \Gamma + H^{\Lambda^c} \quad (46)$$

En appliquant la formule de la résolvante.

$$(H - z)^{-1} = (H^\Lambda + H^{\Lambda^c} - z)^{-1} - (H^\Lambda + H^{\Lambda^c} - z)^{-1} \Gamma (H - z)^{-1},$$

avec

$$(\delta_x, (H^\Lambda + H^{\Lambda^c} - z)^{-1} \delta_y) = \begin{cases} (\delta_x, (H^\Lambda - z)^{-1} \delta_y) & \text{si } x \in \Lambda \text{ et } y \in \Lambda, \\ (\delta_x, (H^{\Lambda^c} - z)^{-1} \delta_y) & \text{si } x \in \Lambda^c \text{ et } y \in \Lambda^c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

car H^Λ et H^{Λ^c} agissent sur des espaces différents. Soit x, y , tel que $|x - y| > L$. Alors

$$G_z(x, y) = \sum_{u \in \partial \Lambda_L(x), |v-u|=1} G_z^{\Lambda_L(x)}(x, u) G_z(v, y) \quad (47)$$

Remarque : En optique le principe d'Huygens-Fresnel s'exprime de la manière suivante : "soit une surface $\delta \Lambda$ et une source lumineuse x . Chaque point u de $\delta \Lambda$ atteint par la lumière émise par la source x se comporte comme une source secondaire fictive. De plus : l'amplitude de l'ondelette émise est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente..."

5.2 Estimée de Wegner

On a émis l'hypothèse que notre loi aléatoire μ admet une densité borné ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous montrons ici que cela a des implications sur la répartition des valeurs propres. Soit $E \in \mathbb{R}$

Proposition 5.1 (Estimée de Wegner).

$$\mathbb{P}(\exists \lambda \text{ valeur propre de } H^\Lambda : \lambda \in [E - \epsilon, E + \epsilon]) \leq 2\pi \|\rho\|_{L^\infty} |\Lambda| \epsilon \quad (48)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists \lambda \text{ valeur propre de } H^\Lambda : \lambda \in [E - \epsilon, E + \epsilon]) \\ & \leq \mathbb{E}(\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H))) \\ & \leq \mathbb{E}(2\epsilon \Im(\text{Tr}(H - E + i\epsilon)^{-1})) \\ & = \mathbb{E}(2\epsilon \Im(\sum_{x \in \Lambda} (\delta_x, (H - E + i\epsilon)^{-1} \delta_x))) \\ & = 2\epsilon \Im(\sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}(\frac{1}{(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0}) - E + i\epsilon)^{-1} \delta_x} + V_\omega(x))) \\ & \leq 2\epsilon \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_{V_y, y \neq x}(\int \Im(\frac{1}{(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0}) - \lambda)^{-1} \delta_x} + V_\omega(x)) \rho(V_\omega(x)) dV_\omega(x)) \\ & \leq 2\epsilon \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_{V_y, y \neq x}(\pi \|\rho\|_\infty) \\ & \leq 2\pi \epsilon |\Lambda| \|\rho\|_\infty \end{aligned}$$

Remarque : Aucune propriété du Laplacien n'est utilisée ici. En particulier il n'y a aucune géométrie.

Corolaire 5.2. *La densité d'état intégrée admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue bornée par $\pi\|\rho\|_{L^\infty}$.*

Démonstration

$$\frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{E}(\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H))) \leq 2\pi\|\rho\|_{L^\infty} \quad (49)$$

□

On peut également estimer la probabilité pour 2 valeurs propres dans un intervalle.

5.3 Estimée de Minami

Proposition 5.2 (Estimée de Minami).

$$\mathbb{P}(\exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ 2 valeur propre de } H^\Lambda : \lambda_1, \lambda_2 \in [E - \epsilon, E + \epsilon]) \leq (2\pi\|\rho\|_{L^\infty} |\Lambda| \epsilon)^2 \quad (50)$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ 2 valeurs propres de } H^\Lambda \text{ dans } [E - \epsilon, E + \epsilon]) \\ & \leq \mathbb{E}(\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H))(\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H)) - 1)) \end{aligned}$$

L'astuce consiste à utiliser le principe du min-max. Rappel : Soit A B deux opérateur de valeurs propres a_1, a_2, \dots et b_1, \dots dont la différence est de rang 1, alors les valeurs propres sont imbriquées $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots$. Corollaire : lorsque l'on intègre par rapport à la variable $V_\omega(x)$ la trace ne change qu'au plus que de 1 et l'expression précédente est

$$\begin{aligned} & \leq 2\epsilon \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_{V_y: y \neq x} \left(\int \Im \left(\frac{1}{(\delta_x, (H_{V_\omega(x)=0}) - \lambda)^{-1} \delta_x)^{-1} + V_\omega(x)} \right) \rho(V_\omega(x)) dV_\omega(x) \text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H_{V_\omega(x)=s})) \right) \\ & \leq 2\epsilon \|\rho\|_\infty \pi \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_{V_\omega(y): y \neq x} (\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H_{V_\omega(x)=s}))) \\ & \leq 2\epsilon \|\rho\|_\infty \pi \sum_{x \in \Lambda} \int \mathbb{E}_{V_\omega(y): y \neq x} (\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H_{V_\omega(x)=s}))) \mu(ds) \\ & \leq 2\epsilon \|\rho\|_\infty \pi \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}(\text{Tr}(1_{[E-\epsilon, E+\epsilon]}(H))) \\ & \leq (2\epsilon \|\rho\|_\infty \pi \Lambda)^2. \end{aligned}$$

5.4 Estimé de Combes Thomas

Le lemme suivant peut s'exprimer ainsi : loin du spectre, la fonction de Green décroît exponentiellement. Soit $H = -\Delta + V$ un opérateur de Schrodinger et Σ son spectre.

Lemme 5.3 (Estimé de Combes Thomas). *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\text{dis}(\lambda, \Sigma) < \frac{1}{2}$ alors*

$$(\delta_x, (H - \lambda)^{-1} \delta_y) \leq \frac{3}{\text{dis}(\lambda, \Sigma)} e^{-\frac{1}{4d} \text{dis}(\lambda, \Sigma) |x-y|} \quad (51)$$

Démonstration Soit $f(z) = e^{-\frac{1}{4d} \text{dis}(\lambda, \Sigma) |x-z|}$.

$$(\delta_x, (H - \lambda)^{-1} \delta_y) = (\delta_x, f(z)^{-1} f(z) (H - \lambda)^{-1} f(z)^{-1} f(z) \delta_y) \quad (52)$$

$$= f(x)^{-1} f(y) (\delta_x, f(z) (H - \lambda)^{-1} f(z)^{-1} \delta_y) \quad (53)$$

$$= e^{-\frac{1}{4d} \text{dis}(\lambda, \Sigma) |x-y|} (\delta_x, (f(z) H f(z)^{-1} - \lambda)^{-1} \delta_y) \quad (54)$$

Il faut maintenant observer que

$$((f(z) H f(z)^{-1} - H)u)(n) = - \sum_{|m-n|=1} (e^{-\frac{1}{2} \text{dis}(\lambda, \Sigma) (|x-n| - |x-m|)} - 1) u(m), \quad (55)$$

donc

$$\|f(z) H f(z)^{-1} - H\| \leq 2d(e^{\frac{1}{4d} \text{dis}(\lambda, \Sigma)} - 1) \leq \frac{1}{2} \text{dis}(\lambda, \Sigma) e^{\frac{1}{8d}}. \quad (56)$$

Ainsi pour $\text{dis}(\lambda, \Sigma(f(z) H f(z)^{-1})) \geq \text{dis}(\lambda, \Sigma) - \frac{1}{2} \text{dis}(\lambda, \Sigma) e^{\frac{1}{8d}} \geq \frac{1}{3} \text{dis}(\lambda, \Sigma)$, on a

$$\|(f(z) H f(z)^{-1} - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{3}{\text{dis}(\lambda, \Sigma)} \quad (57)$$

6 Moment fractionnaire et décroissance exponentielle

Nous étudions maintenant le comportement de la fonction de Green à grande distance. Nous cherchons à montrer une décroissance exponentielle lorsque $|x - y| \rightarrow \infty$. Cette section aura pour but de démontrer le résultat suivant :

Théorème 6.1. *Il existe I un intervalle, $C > 0$, $\nu > 0$ et $0 < s < \frac{1}{2}$ tels que*

$$\forall z \Re(z) \in I \mathbb{E}(|G_z(x, y)|^s) \leq C e^{-\nu|x-y|} \quad (58)$$

Méthode Du à la formule (41), si E est dans le spectre de H , $\lim_{z \rightarrow E} \mathbb{E}(|G_z(x, x)|) = \infty$. C'est la raison pour laquelle on va manipuler des moments fractionnaires. On utilise ici encore l'hypothèse que la loi aléatoire μ admet une densité par rapport à Lebesgue bornée. Notation : $\mathbb{E}_{x,y}$ signifie que l'on intègre sur les potentielles $V_\omega(x)$ et $V_\omega(y)$.

Proposition 6.1. *Soit $s : 0 < s < 1$. Il existe C_s , indépendant de $z \in \mathbb{C}$, tel que*

$$\mathbb{E}_{x,y}(|G_z(x, y)|^s) \leq C_s. \quad (59)$$

Démonstration Soit P , le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par δ_x, δ_y . Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{x,y}(|G_z(x, y)|^s) \\ & \leq \mathbb{E}_{x,y}(\|PG_zP\|^s) \\ & = \int \int \|((P(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0} - z)^{-1}P)^{-1} - V_\omega(x)\delta_x - V_\omega(y)\delta_y)^{-1}\|^s \rho(V_\omega(x))\rho(V_\omega(y))dV_\omega(x)dV_\omega(y) \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $U = V_\omega(x) + V_\omega(y)$, $W = V_\omega(x) - V_\omega(y)$, $\sigma = \delta_x - \delta_y$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{x,y}(|G_z(x, y)|^s) \\ & \leq \int \int \|((P(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0} - z)^{-1}P)^{-1} - W\sigma - UI_{d2})^{-1}\|^s \rho\left(\frac{1}{2}(U - W)\right)\rho\left(\frac{1}{2}(U + W)\right)dUdW \end{aligned}$$

En notant λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de $(P(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0} - z)^{-1}P)^{-1} - W\sigma$ on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{x,y}(|G_z(x, y)|^s) \\ & \leq \|\rho\|_\infty^2 \int_{\text{support}(\mu) - \text{support}(\mu)} \int_{\text{support}(\mu) + \text{support}(\mu)} \frac{1}{\min(|\lambda_1 - U|, |\lambda_2 - U|)^s} dUdW \\ & < \infty \end{aligned}$$

□

Dans la suite nous supposons $s < \frac{1}{2}$. Cela est valable même si z est dans le spectre.

6.1 Initialisation dans les zones "queue de Lifshitz"

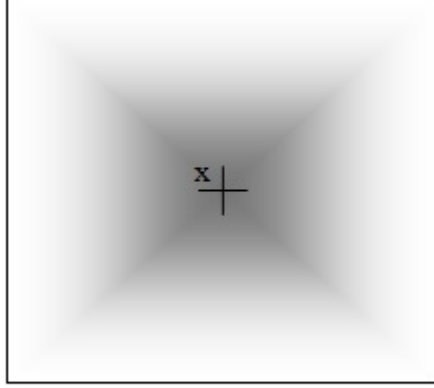
Nous commençons par montrer la décroissance dans une boîte de taille finie. le sommet x est au centre de la boîte et y est au bord.

Proposition 6.2 (Initialisation). *Il existe C une constante telle que*

$$\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L(x)}(x, y)|^s) \leq C e^{-\nu L \frac{d}{d+2}} \quad (60)$$

pour tout $y \in \delta\Lambda_L(x)$, $\Re(z) < E_0 + \frac{CL^{-\frac{2}{d+2}}}{4}$

FIGURE 1 – "inicialisation", décroissance sur une boite



Démonstration Soit C et β de l'équation (39), qui apparait dans le phénomène "queue de Lifshitz". On pose $Y = \frac{CL^{-\beta}}{2}$. Soit z avec $\Re(z) < E_0 + \frac{Y}{2}$. On a alors

$$\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s) = \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s 1_{E_0(H^{\Lambda_L}) > Y}) + \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s 1_{E_0(H^{\Lambda_L}) \leq Y}) \quad (61)$$

D'après l'estimée de Combes Thomas (51), il existe $C > 0$, $\nu > 0$ tels que

$$\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s 1_{E_0(H^{\Lambda_L, N}) > Y}) < Ce^{-s\nu Y|y-x|} \quad (62)$$

D'après le théorème sur les queues de Lifshitz

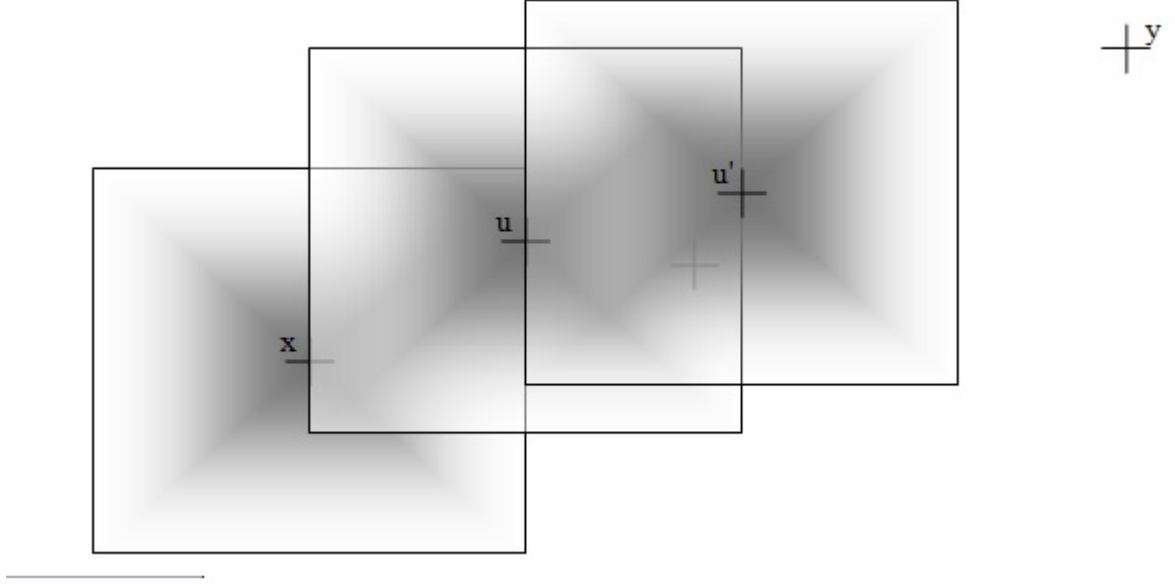
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s 1_{E_0(H^{\Lambda_L, N}) \leq Y}) &\leq \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s 1_{E_0(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0}^{\Lambda_L, N}) \leq Y}) \\ &\leq \sup_\omega \mathbb{E}_{x, y}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s) \mathbb{P}(E_0(H_{V_\omega(x)=0, V_\omega(y)=0}^{\Lambda_L, N}) \leq Y) \\ &\leq C_s L^d e^{-\nu' L^{\frac{\beta d}{2}}} \end{aligned}$$

En conclusion, avec $\beta = \frac{2}{d+2}$, les deux termes ont la même décroissance sous exponentielle. \square

6.2 Propagation

Dans la proposition précédente, le spectre où il y a "décroissance", dépend de la taille de la boite. Nous allons remédier à ce problème grâce à (47).

FIGURE 2 – "propagation", utilisation du principe d'Huygens-Fresnel



Nous appliquons deux fois la formule de la résolvante (47), à $\Lambda_L(x)$ et à $\Lambda_{L+1}^c(x)$:

$$G_z(x, y) = \sum_{(v,u) \in \partial\Lambda_L(x)} \sum_{(v',u') \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} G_z^{\Lambda_L(x)}(x, u) G_z(v, v') G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', y) \quad (63)$$

Remarquez que $G_z^{\Lambda_L(x)}$ et $G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}$ ne dépendent pas des potentielles en v et v' qui se trouvent dans la zone entre les deux. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|G_z(x, y)|^s) &= \sum_{(v,u) \in \partial\Lambda_L(x)} \sum_{(v',u') \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} \mathbb{E}_{a \neq v, v'}(\mathbb{E}_{v, v'}(|G_z^{\Lambda_L(x)}(x, u) G_z(v, v') G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', y)|^s)) \\ &\leq C_s \sum_{(v,u) \in \partial\Lambda_L(x)} \sum_{(v',u') \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} (\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L(x)}(x, u)|^s) \mathbb{E}(G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', y)|^s)) \end{aligned}$$

Pour utiliser plusieurs fois les formules (47) et (60), il faudrait remplacer dans cette expression $G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}$ par G_z . C'est ce que nous faisons ici. On applique encore une fois la formule des résolvantes :

$$G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', y) = G_z(u', y) + \sum_{(a,b) \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', a) G_z(b, y) \quad (64)$$

On note $f_s(\alpha, \beta) = \int |\frac{\alpha - V_\omega(a)}{\beta - V_\omega(a)}|^s \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Remarquez que pour $s < 1/2$, $\frac{\sqrt{f_{2s}(\alpha, \beta)}}{f_s(\alpha, \beta)}$ est continue et borné lorsque α ou β tend vers ∞ , donc est borné. Appelons K_s la majoration.

Les α et β apparaitront lorsque l'on écrira G_z sous forme de fraction rationnelle, en appliquant la formule (45) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', a)G_z(b, y)|^s) &= \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\int |G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', a)G_z(b, y)|^s \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a) \right) \\
&\leq \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\sqrt{\int |G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', a)|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \sqrt{\int |G_z(b, y)|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \right) \\
&\leq \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\sqrt{\int |G_z^{\Lambda_{L+1}^c(x)}(u', a)|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \sqrt{\int |G_z(b, y)|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \right) \\
&\leq \sqrt{C_{2s}} \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\sqrt{\int |G_z(b, y)|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \right) \\
&\leq \sqrt{C_{2s}} \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\sqrt{\int \left| \frac{\alpha - V_\omega(a)}{\beta - V_\omega(a)} \right|^{2s} \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a)} \right) \\
&\leq \sqrt{C_{2s}} K_s \mathbb{E}_{x \neq a} \left(\int \left| \frac{\alpha - V_\omega(a)}{\beta - V_\omega(a)} \right|^s \rho(V_\omega(a)) dV_\omega(a) \right) \\
&\leq \sqrt{C_{2s}} K_s \mathbb{E}(|G_z(b, y)|^s)
\end{aligned}$$

En résumé, il existe une constant C , qui ne dépend que de s , tel que le résultat suivant soit vrai.

Lemme 6.1 (Formule pour la propagation).

$$\mathbb{E}(|G_z(x, y)|^s) \leq C \sum_{(v, u) \in \partial\Lambda_L(x)} \sum_{(v', u') \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} \sum_{(a, b) \in \partial\Lambda_{L+1}^c(x)} (\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L(x)}(x, u)|^s) \mathbb{E}(|G_z(b, y)|^s)) \quad (65)$$

Nous pouvons appliquer plusieurs fois cette formule en remplaçant x par b , pour obtenir la décroissance de la résolvante, c'est à dire le théorème 6.1 :

$$\mathbb{E}(|G_z(x, y)|^s) \leq C e^{-\nu|x-y|}$$

Démonstration Soit C et ν de l'équation 60. Il existe L tel que $(2L+1)^{3d} C e^{-\nu L \frac{d}{d+2}} = \tau < 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, y)|^s) &\leq C_s (2L+1)^{3(d-1)} \sup_{dis(u, \partial\Lambda_x \leq 1, dis(b, \partial\Lambda_x \leq 1)} \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L}(x, u)|^s) \mathbb{E}(|G_z(b, y)|^s) \\
&\leq \tau \sup_{b, |b-y| > |x-y| - L} \mathbb{E}(|G_z(b, y)|^s) \\
&\leq \tau^{\lfloor \frac{|x-y|}{L} \rfloor} \sup_{v', |v'-y| > |x-y| - \lfloor \frac{|x-y|}{L} \rfloor L} \mathbb{E}(|G_z(v', y)|^s) \\
&\leq C_s \tau^{\lfloor \frac{|x-y|}{L} \rfloor}
\end{aligned}$$

En conclusion, on pose $I = [E_0, E_0 + \frac{CL^\beta}{4}]$, $C = C_s$ et $\nu = -\frac{\log(\tau)}{L}$. \square

7 Statistique Poissonnienne

Nous avons montré dans la section 3 que la mesure de probabilité ν_{H^Λ} converge vers la densité d'états intégrée. Le but de cette partie est de montrer que lorsqu'il y a localisation au sens des moments fractionnaires (6.1) sur un intervalle I , la statistique locale des valeurs propres converge vers un processus de Poisson.

On observe les valeurs propres autour d'un point E

Définition : Statistique locale. Soit $E \in I$, et Λ_L un domaine. On définit une mesure sur \mathbb{R} telle que $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

$$\varpi_{E, H^\Lambda}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\varpi_{E, H^\Lambda}(dx) \quad (66)$$

$$= |\Lambda_L| \int_{\mathbb{R}} f(E + (x - E)|\Lambda_L|) d\nu_{H^\Lambda}(dx) \quad (67)$$

$$= \sum_{\lambda_i \text{ vp}} f(E + (\lambda_i - E)|\Lambda_L|) \quad (68)$$

où λ_i sont les valeurs propres de H^{Λ_L} .

Remarque : c'est un processus ponctuel.

Rappel On dira qu'il y a convergence pour un processus ponctuel si il y a convergence des transformées de Laplace : $\forall \phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (continues à support compact) positive

$$\mathbb{E}(e^{-\varpi_{E, H^\Lambda}(\phi)}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-N_E(\phi)}) \quad (69)$$

On appelle intensité In d'un processus ponctuel sur \mathbb{R} la mesure sur \mathbb{R} définie par : $In(A) = \mathbb{E}(\varpi(A))$ pour tout A Borel. Par Werner, elle admet une densité bornée par rapport à Lebesgue. On rappelle que sous l'hypothèse d'absolu continuité de μ , la densité d'états intégrée admet une densité n par rapport à la mesure de Lebesgue. Appelons N_E un processus de Poisson sur \mathbb{R} de paramètre $n(E)$

Le théorème qui est l'objet de cette partie, est le suivant.

Théorème 7.1. Soit I où il y a localisation au sens (6.1). Alors, pour presque tout $E \in I$, ϖ_{E, H^Λ} converge vers un processus de Poisson de paramètre $n(E)$.

Démonstration. On utilisera les lorentziennes pour étudier le spectre de H . Soit \mathcal{A} l'espace vectoriel engendré par les lorentziennes.

$$f(t) = \sum_{i=1}^K \alpha_i \Im\left(\frac{1}{t - \xi_i}\right) \quad (70)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $\xi_i \in \mathbb{C}_+ - \mathbb{R}$.

Le lemme suivant montre qu'il suffit de se restreindre à cette classe de fonctions pour montrer la convergence.

Lemme 7.1. Si $\forall f \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(e^{-\varpi_{E, H^\Lambda}(f)}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-N_E(f)})$, alors ϖ_{E, H^Λ} converge vers N_E .

Démonstration Notons $\mathcal{L}_{\varpi_{E,H^{\Lambda_L}}}$ et \mathcal{L}_{N_E} , les transformés de Laplace. L'intensité de ces processus ponctuels admet une densité uniformément borné par rapport à Lebesgue. Alors $f \rightarrow \mathcal{L}_{\varpi_{E,H^{\Lambda_L}}}(f)$ et $f \rightarrow \mathcal{L}_{N_E}(f)$ sont uniformément continues de L^1 dans \mathbb{R} . Du coup,

$$\mathbb{E}(e^{-\varpi_{E,H^{\Lambda_L}}(f)} - e^{-\varpi_{E,H^{\Lambda_L}}(g)}) \leq \mathbb{E}(|\varpi_{E,H^{\Lambda_L}}(f) - \varpi_{E,H^{\Lambda_L}}(g)|) \leq In(|f-g|) \leq 2\pi\|\rho\|_{L^\infty}\|f-g\|_{L^1}$$

Pour conclure, on remarque que l'ensemble des fonction positive de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est inclus dans l'adhérence de \mathcal{A} pour L^1 . On peut utiliser la formule suivante :

$$g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\pi} \left(\int g(\lambda) \frac{1}{(\lambda - x)^2 + \epsilon^2} d\lambda \right) \quad (71)$$

Pour tout $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

7.1 Division en sous boîtes

On suppose qu'il existe un intervalle I , $C > 0$, $\nu > 0$, $0 < s < 1$ tels que ,

$$\mathbb{E}(|G_z(x, y)|^s) \leq C e^{-\nu|x-y|} \quad (72)$$

pour tout $z \Re(z) \in I$

Nous allons à l'aide des résolvantes comparer le spectre des deux opérateurs, $H^{\Lambda_{NL}}$ et $\sum_{n \in [-N; N]} H^{\Lambda_L(n(2L+1))}$. Appelons $\partial D = \bigcup_{n \in [-N; N]} \partial \Lambda_L(n(2L+1))$, la frontière qui sépare les cubes de tailles L entre eux. Ces deux opérateur ne diffèrent que de la valeur du laplacien sur le bord ∂D , que nous noterons Γ . Soit $x \in \Lambda_{NL}$, et appelons \tilde{x} le centre du cube de taille L qui contient x .

Nous distinguerons les sommets proches de la frontière ∂D . Pour cela nous introduisons $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = o(L)$. On précisera plus tard des conditions plus précises entre N , L et l .

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{|\Lambda_{LN}|} \left(\Im \text{Tr}((H^{\Lambda_{NL}} - z)^{-1}) - \Im \text{Tr} \left(\left(\sum_{n \in [-N; N]} H^{\Lambda_L(n(2L+1))} - z \right)^{-1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|\Lambda_{LN}|} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) \leq l} G_z^{\Lambda_{LN}}(x, x) - G_z^{\Lambda_L(\tilde{x})}(x, x) \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda_{LN}|} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) > l} G_z^{\Lambda_{LN}}(x, x) - G_z^{\Lambda_L(\tilde{x})}(x, x) \\ &= \frac{1}{|\Lambda_{LN}|} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) \leq l} G_z^{\Lambda_{LN}}(x, x) - G_z^{\Lambda_L(\tilde{x})}(x, x) \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda_{LN}|} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) > l} \sum_{(u, v) \in \partial D} (G_z^{\Lambda_{LN}}(x, u) G_z^{\Lambda_L(\tilde{x})}(v, x)) \end{aligned}$$

On appelle A_L le premier terme de la somme, et B_L le deuxième terme.

On a uniformément en z ,

$$\mathbb{E}(A_L) = \mathcal{O}\left(\frac{l}{L}\right) = o_{L \rightarrow \infty}(1) \quad (73)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_L^{\frac{s}{2}}) &\leq \frac{1}{|\Lambda_{LN}|^{\frac{s}{2}}} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) > l} \sum_{(u, v) \in \partial D} \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_{LN}}(x, u) G_z^{\Lambda_L(\bar{x})}(v, x)|^{\frac{s}{2}}) \\
&\leq \frac{1}{|\Lambda_{LN}|^{\frac{s}{2}}} \sum_{x \in \Lambda_{NL}, \text{dis}(x, \partial D) > l} \sum_{(u, v) \in \partial D} \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_{LN}}(x, u)|_s)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}(|G_z^{\Lambda_L(\bar{x})}(v, x)|_1^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\Lambda_{LN}|^{1-\frac{s}{2}} |\partial D| C_s^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}l} \\
&\leq C' |NL|^{(1-\frac{s}{2})d} |L|^{d-1} e^{-\frac{s}{2}l}
\end{aligned}$$

Il existe donc $A > 0$ tel que si $l > A \log(NL)$, alors $\mathbb{E}(B_L^{\frac{s}{2}}) = o_{NL \rightarrow \infty}(1)$, uniformément en z . En conclusion, sous ces hypothèses, $A_L + B_L \rightarrow 0$ en probabilité uniformément en z .

Statistique locale pour une lorentzienne

$$\varpi_{E, H^{\Lambda_L}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t-z})) = \sum_{\lambda_i \text{ vp}} \frac{\mathfrak{S}(z)}{(E + (\lambda_i - E)|\Lambda_L| - \Re(z))^2 + \Im(z)^2} \quad (74)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{\lambda_i \text{ vp}} \frac{\mathfrak{S}(\frac{z}{|\Lambda_L|})}{(\frac{E}{|\Lambda_L|} + (\lambda_i - E) - \Re(\frac{z}{|\Lambda_L|}))^2 + \Im(\frac{z}{|\Lambda_L|})^2} \quad (75)$$

$$= \nu_{H^{\Lambda}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t - E - \frac{z-E}{|\Lambda|}})) \quad (76)$$

$$(77)$$

Corollaire Pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a

$$\varpi_{E, H^{\Lambda_{NL}}}(f) - \varpi_{E, \sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(f) \rightarrow 0 \quad (78)$$

en probabilité lorsque $(N, L) \rightarrow \infty$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
X &= \varpi_{E, H^{\Lambda_{NL}}}(f) - \varpi_{E, \sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(f) \\
&= \sum_i^K \alpha_i \varpi_{E, H^{\Lambda_{NL}}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t - \xi_i})) - \varpi_{E, \sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t - \xi_i})) \\
&= \sum_i^K \alpha_i \nu_{H^{\Lambda_{NL}}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t - E - \frac{\xi_i - E}{|\Lambda|}})) - \nu_{\sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t - E - \frac{\xi_i - E}{|\Lambda|}})) \\
\mathbb{P}(X > \epsilon) &\leq K \sup_{z \in \mathbb{C}_+} \mathbb{P}((\nu_{H^{\Lambda_{NL}}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t-z})) - \nu_{\sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(\mathfrak{S}(\frac{1}{t-z}))) > \frac{\epsilon}{\sum_i |\alpha_i|}) \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

Par théorème de convergence dominé, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire $\forall, f \in \mathcal{A} \mathbb{E}(e^{-\varpi_{E, H^{\Lambda_{NL}}}(f)}) - \mathbb{E}(e^{-\varpi_{E, \sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(f)}) \rightarrow_{L \rightarrow \infty} 0.$

Appelons $C_{N,L} = \sum_n H^{\Lambda_L((2L+1)n)}$. Remarquons que le spectre des boites sont indépendantes et identiquement distribués.

Il ne reste plus qu'à démontrer la convergence de $\varpi_{E,C_{N,L}}$ vers un processus de Poisson.

7.2 Processus de Poisson

Commençons par ce théorème classique :

Théorème : Processus de Poisson

Soit $Y(n) = \sum_i Z_{i,n}$, où $Z_{i,n}$ est un processus ponctuel sur un intervalle I borné, indépendants et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $J \subset I$

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum_i \mathbb{E}(Z_{i,n}(J)) \rightarrow_n \lambda|J|, \\ ii) \quad & \sup_i \mathbb{E}(Z_{i,n}(I)) \rightarrow_n 0, \\ iii) \quad & \sum_i \mathbb{E}(Z_{i,n}(I)(Z_{i,n}(I) - 1)) \rightarrow_n 0. \end{aligned}$$

Alors Y_n converge de vers un processus de poisson sur I de paramètre λdx .

Démonstration Tout d'abord, grâce à *iii*), $Z_{i,n}$ peut être remplacé par $Z_{i,n}1_{Z_{i,n}(I) \leq 1}$. En effet $\forall J$

$$\sum_i \mathbb{E}((Z_{i,n}1_{Z_{i,n} > 1})(J)) \leq \sum_i \mathbb{E}(Z_{i,n}(I)(Z_{i,n}(I) - 1)) \rightarrow_n 0 \quad (79)$$

Soit f à support compact dans I positive. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-Y(n)(f)}) &= \prod_i \mathbb{E}(e^{-Z_{i,n}(f)}) \\ &= \prod_i \mathbb{E}(e^{-Z_{i,n}(f)}1_{Z_{i,n}(I) \leq 1} + e^{-Z_{i,n}(f)}1_{Z_{i,n}(I) > 1}) \\ &= \prod_i \mathbb{E}(e^{-Z_{i,n}(f)}1_{Z_{i,n}(I) \leq 1})e^{\tilde{g}(Z_{i,n})} \\ &\quad \text{où } \tilde{g}(Z_{i,n}) \text{ est } \mathcal{O}(\mathbb{P}(Z_{i,n}(I) \geq 2)) \\ &= e^{\sum_i \tilde{g}(Z_{i,n})} \prod_i \mathbb{E}(e^{-Z_{i,n}(f)}1_{Z_{i,n}(I) \leq 1}) \end{aligned}$$

Par *iii*) on trouve $\sum_i \tilde{g}(Z_{i,n}) \rightarrow 0$.

On termine la preuve : soit $f = \sum_k \alpha_k 1_{J_k}$ avec les J_k disjoints. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-Y(n)(f)}) &= \prod_i \mathbb{E}(e^{-Z_{i,n}(f)}) \\ &= \prod_i (1 - \sum_k \mathbb{P}(Z_{i,n}(J_k) = 1)(e^{-\alpha_k} - 1)) \\ &= e^{\sum_i \log(1 - \sum_k \mathbb{P}(Z_{i,n}(J_k) = 1))(e^{-\alpha_k} - 1)} \\ &\simeq e^{-\sum_i \sum_k \mathbb{P}(Z_{i,n}(J_k) = 1)(e^{-\alpha_k} - 1)} \\ &\rightarrow e^{-\int_I (e^{-f} - 1)\lambda dx} \end{aligned}$$

Qui est bien la transformée de Laplace du processus de poisson de paramètre λ .

Fin de la démonstration du Théorème 7.1

Il reste à appliquer ce théorème à $\varpi_{E, C_{N,L}} = \sum_{n \in [-N; N]^d} \varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}$.

- Par l'estimée de Wegner, $\mathbb{E}(\varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(I)) \leq 2\pi \|\rho\|_\infty \frac{|I||\Lambda_L|}{|\Lambda_{NL}|} = \mathcal{O}(\frac{1}{N^d})$. On a donc *ii*).
- Par l'estimée de Minami

$$\mathbb{E}(\varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(I))(\varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(I) - 1) \leq (2\pi)^2 \frac{|I|^2 |\Lambda_L|^2}{|\Lambda_{NL}|^2} = \mathcal{O}(N^{-2d}), \quad (80)$$

ce qui donne *iii*)

Montrons *i*) Reprenons la division en boîte, et faisons tendre N vers l'infini. On a vu que pour tout $x \in \Lambda$ tel que $d(x, \partial\Lambda) > l$, avec $l > A \log(\Im z)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_z(x, x)) - G_z^{H^\Lambda}(x, x) &= \mathbb{E} \sum_{(u,v) \in \partial D} (G_z(x, u)) G_z^{H^\Lambda}(v, x) \\ &\leq \Im(z)^{s-2} \mathbb{E} \sum_{(u,v) \in \partial D} (|G_z(x, u)|)^s \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Et par définition de N la densité d'état intégrée, on a

$$\mathbb{E}(G_z(x, x)) = \int \frac{1}{t-z} N(dt) \quad (81)$$

Pour tout E tel que N est dérivable en E de dérivé $n(E)$.

$$\lim_{z \rightarrow E} \mathbb{E}(G_z(x, x)) = \pi n(E) \quad (82)$$

En conclusion, $\frac{1}{\Lambda} \sum_x G_{\frac{z}{|\Lambda|}}^{H^\Lambda}(x, x) \rightarrow n(E)$. et donc

$$\mathbb{E}(\varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(\Im(\frac{1}{z-t}))) \simeq \frac{\pi n(E)}{(2N+1)^d}. \quad (83)$$

D'après (71). Pour tout $J \subset I$,

$$\mathbb{E}(\varpi_{E, H^{\Lambda_L((2L+1)n)}}(J)) \rightarrow n(E)|J|. \quad (84)$$

Il suffit alors d'utiliser que N est une fonction croissante, donc dérivable presque partout. \square

A ANNEXE : Théorie de Bloch-Floquet

Nous étudions ici la théorie spectrale de l'opérateur de Schrodinger périodique sans aléa, dans un cube avec les conditions au bord périodiques (c'est géométriquement un tore). On travaillera dans le modèle continu :

$$H_0 = -\Delta + V_0, \quad (85)$$

avec V_0 périodique et $\Lambda = [-L; L]^d$ ou \mathbb{Z}^d .

On rappelle que, si on note \tilde{T} l'opérateur de décalage de $l^2(\mathbb{Z}^d)$, $(\tilde{T}(n, u))(x) = u(n+x)$, alors pour tout n appartenant au sous groupe de \mathbb{Z}^d laissant invariant V_0 , $\tilde{T}(n, \cdot)H_0\tilde{T}(-n, \cdot) = H_0$. On choisit naturellement une famille génératrice de ce sous groupe (n_1, n_2, \dots, n_r) . Par exemple, si V_0 est constante, on peut choisir $n_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $n_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $n_d = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Lemme A.1. H_0 commute avec les $\tilde{T}(n, \cdot)$.

Ils sont donc diagonalisables dans une même base. $\tilde{T}(n, \cdot)$ étant un opérateur unitaire, ces valeurs propres sont de la forme $\exp(ik)$. Si $\Lambda = [-L + L]^d$, il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres de H_0 telle que pour vecteur propre ϕ de H_0 , il existe (k_1, \dots, k_r) tel que $\forall l \in [1, \dots, r] \tilde{T}(n_l, \cdot)\phi = \exp(ik_l)\phi$. En particulier, ces vecteurs propres sont complètement "délocalisés".

Théorème A.1 (bande spectrale). Si $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, le spectre de H_0 , $\Sigma(H_0)$ est absolument continu et il existe une suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\Sigma(H_0) = \bigcup_n [a_n, b_n]$

Démonstration : Du au lemme précédent, le spectre de H_0 avec $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ (ou \mathbb{R}^d) est égal aux spectre de H_0 avec $\Lambda = \mathcal{V}_0$ la cellule de base du potentiel périodique V_0 si on ajoute les conditions suivantes. Dans le modèle continu, on impose pour conditions aux bords $\forall l \in [1, \dots, r] \phi(\cdot + n_l) = \exp(ik_l)\phi(\cdot)$, par exemple si \mathcal{V}_0 est le cube unité, $\forall l \in [1, \dots, r] \phi(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_d) = \exp(ik_l)\phi(x_1, \dots, x_{l-1}, 1, x_{l+1}, \dots, x_d)$. Dans le modèle discret, Pour chaque arête (u, v) orienté à la frontière du cube, mais qui ferme le tore sous l'action de $\tilde{T}(n_l, \cdot)$ on ajoute le terme $\exp(ik_l)\delta_{u,v} + \exp(-ik_l)\delta_{v,u}$

Remarquez que dans le modèle continu, c'est bien un opérateur symétrique sur H^2 .

$$\int_{\mathcal{V}_0} -g\Delta\bar{f}dx^d = \int_{\mathcal{V}_0} \nabla\bar{f}\nabla gdx^d + \int_{\partial\mathcal{V}_0} \bar{f}\nabla g + \nabla\bar{f}gdS. \quad (86)$$

Le deuxième terme est nul, car les intégrales sur les faces opposés de \mathcal{V}_0 se compensent.

Soit $(k_l)_{l=1, \dots, r}$ fixé et soit $\lambda_1((k_l)_{l=1, \dots, r}), \lambda_2((k_l)_{l=1, \dots, r}), \dots$, les valeurs propres de $H_0^{\mathcal{V}_0}$ associées aux conditions aux bord. Alors pour tout i , $\lambda_i((k_l)_{l=1, \dots, r})$ est une fonction continue en $(k_l)_{l=1, \dots, r}$, et son image est donc un intervalle $[a_i, b_i]$. Le spectre de H_0 est donc $\bigcup_i [a_i, b_i]$. \square

Références

- [1] Michael Aizenman and Stanislav Molchanov. Localization at large disorder and at extreme energies : an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.*, 157(2) :245–278, 1993.
- [2] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109 :1492–1505, Mar 1958.
- [3] René Carmona and Jean Lacroix. *Spectral theory of random Schrödinger operators*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] M. Disertori, W. Kirsch, and A. Klein. *Random Schrodinger Operators*. Panoramas et synthèses. Société mathématique de France, 2008.
- [5] Jürg Fröhlich and Thomas Spencer. Absence of diffusion in the anderson tight binding model for large disorder or low energy. *Comm. Math. Phys.*, 88(2) :151–184, 1983.
- [6] I. M. Lifshitz. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Physics-Uspëhi*, 7(4) :549–573, 1965.
- [7] Nariyuki Minami. Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 177(3) :709–725, 1996.
- [8] G. Stolz. An Introduction to the Mathematics of Anderson Localization. *ArXiv e-prints*, April 2011.