Percolation sur des graphes de Cayley et démonstration d'une variante faible du problème de Von Neumann

Raphael Ducatez

25/06/2014

Table des matières

Introduction

La notion de groupe moyennable avait été introduite par Von Neumann pour étudier le paradoxe de Banach Tarski, depuis elle a été intensivement étudiée. Un groupe est dit moyennable si on peut construire (si nécessaire, avec l'axiome du choix) une "moyenne" positive, invariante par action du groupe. Les groupes $\mathbb{Z}^k$ sont par exemple moyennables. L'exemple élémentaire de groupe non moyennable est le groupe libre engendré par 2 éléments F_2. Une propriété affirme que tout sous groupe d'un groupe moyennable est moyennable, d'où le problème de Von Neumann : Tout groupe non moyennable admet-il F_2 comme sous groupe ? Il se trouve que la réponse est non. L'objet principal de ce mémoire est un théorème de Russel Lyons et Damien Gaboriau : "tout groupe non moyennable admet une action mesurable libre qui préserve la mesure et ergodique sur un espace de probabilité dont les orbites se partitionnent en des orbites d'une action libre et ergodique de F_2" [2]. Ce qui constitue une variante faible du problème de Von Neumann en théorie de la mesure.

L'idée est d'utiliser des outils développés sur la percolation de graphes de Cayley pour construire des sous orbites suffisamment ramifiées pour laisser apparaitre la construction de l'action de F_2. La construction en elle même de l'action de F_2 nécessite l'utilisation d'outils sur les classes d'équivalences notamment la notion de coût [4], ces théorèmes étant malheureusement très techniques ils ne seront pas démontrés ici (voir [1]). Nous nous contenterons de traiter la partie plus probabiliste du problème à savoir l'étude des percolations sur les graphes de Cayley. Aussi le théorème principale qui sera montré d'une manière auto consistante dans ce mémoire est que "presque surement les composantes connexes infinies d'une percolation ne peuvent être distinguées mesurablement les unes des autres" [7]. Nous pourrons alors utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de Gaboriau et Lyons. Pour cela nous présenterons également plusieurs résultats intermédiaires assez général sur les graphes de Cayley de groupes non moyennables : "il existe un choix du graphes de Cayley et d'un paramètre tel que la percolation admette d'une infinité de composantes connexes infinies" [6], "ces composantes connexes ont une infinité de bouts" [7], "la marche aléatoire sur ces graphes est transciente (transitoire)". L'annexe sur les réseaux électriques présente des résultats très généraux nécessaire pour montrer la transcience [5]. On utilisera au passage le "principe de transport de masse" qui est un outil assez pratique pour étudier ces propriétés [3].

1 Introduction à la notion de groupes moyennables et au problème de Von Neumann

1.1 Groupes et graphes moyennables

Nous ne nous intéresserons dans ce mémoire qu'à des groupes dénombrables engendrés par un nombre fini d'éléments. Il est possible de représenter ces groupes par des graphes appelés graphes de Cayley.

1.1.1 Définition : Graphes de Cayley

Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un ensemble fini d'éléments S. On pourra supposer S symétrique ($S^{-1} = S$). On appelle graphe de Cayley le graphes non orienté (Γ, E_S) où les sommets du graphe sont les éléments de Γ et les arêtes sont les paires $[(g, gs) : g \in \Gamma\ s \in S]$.

Notation On notera "o" l'élément neutre du groupe.

Rappel et notation : "la frontière" On peut définir la frontière soit en considérant les sommets soit en considérant les arêtes. Soit (G, E) un graphe, soit A un sous ensemble de Γ.

$$\partial A =_{def} [x \in (\Gamma - A) : \exists y \in A\ ,\ (x, y) \in E] \subset \Gamma \tag{1}$$

$$\hat{\partial A} =_{def} [(x, y) \in E : x \in (\Gamma - A)\ ,\ y \in A] \subset E \tag{2}$$

$$deg_E(x) =_{def} |[(y, x) \in E]| \tag{3}$$

(Où $|.|$ est le cardinal de l'ensemble)

Rappel et notation : "la distance" Soit (G, E) un graphe, soit A et B un sous ensemble de G.

$$d_E(A, B) =_{def} inf[n : \exists x_0, x_1 ..., x_n : \forall k\ (x_k, x_{k+1}) \in E,\ x_0 \in A,\ x_n \in B \tag{4}$$

1.1.2 Définition : Condition de Folner

Soit (G, E) un graphe, on peut définir une constante i :

$$i((G, E)) =_{def} inf[\frac{|\partial A|}{|A|} : A \in Gfini] \tag{5}$$

On dira que (G, E) vérifie la condition de Folner si $i((G, E)) = 0$. On dira aussi que le graphe est moyennable.
Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un ensemble fini d'éléments S. On dira que Γ vérifie la condition de Folner si son graphe de Cayley vérifie la condition de Folner.

Remarque Cela ne dépend pas du choix du générateur S.
En effet, soit S^1, S^2 deux ensembles générateurs d'un groupe G. Alors comme S^1 engendre G et S^2 est fini, il existe $n \in N$ tel que tous les éléments de S^2 puissent être écrits comme un mot formé d'élément de S^1 de longueur inférieur ou égale à n. On a alors $\forall A \subseteq G$

$$[x : d_{E_{S^2}}(x, A) = 1] \subseteq [x : 0 < d_{E_{S^1}}(x, A) < n + 1] \subseteq [x : d_{E_{S^1}}(x, \partial_{E_{S^1}} A) < n] \tag{6}$$

En particulier $|\partial_{E_{S^2}}(A)| < |\partial_{E_{S^1}} A)|(|S^1|)^n$. Donc si (G, E_{S^1}) vérifie la condition de Folner alors (G, E_{S^2}) aussi.

Remarque Si (G, E) vérifie la condition de Folner alors il existe une suite croissante G_n de parties finies de G tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$ et $lim_{n\to\infty} \frac{|\partial_E(G_n)|}{|G_n|} = 0$.

1.1.3 Définition d'une moyenne (mean)

Soit Γ un groupe moyennable, alors il existe un application $m|P(\Gamma) \to [0,1]$, tel que
- $\forall g \in \Gamma\ A \subseteq \Gamma, m(Ag) = m(A)$ (invariance)
- $\forall A, B \in P(\Gamma)$ disjoints ,$m(AUB) = m(A) + m(B)$ (fini additivité)
- $m(\Gamma) = 1$

On appellera m une moyenne sur Γ

La grande différence avec une mesure de probabilité est que l'on ne suppose seulement l' "additivité fini" et non l'"additivité dénombrable". Il est d'ailleurs évident qu'il n'existe pas de mesure de probabilité invariante sur un groupe dénombrable.

1.1.4 Proposition : Existence d'une moyenne sous condition de Folner

(voir [4])
Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un ensemble fini d'éléments vérifiant la condition de Folner alors il existe une moyenne m sur Γ.

Démonstration

Rappel D'après le théorème de Hann Banach, il existe une application linéaire ϕ sur l'ensemble des suites de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ de norme 1, positive, qui prolonge l'application linéaire qui à toute suite qui converge lui associe sa *limite*.

On définit m grâce à ϕ et une une suite croissante Γ_n de partie finies de Γ tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma$ et $lim_{n\to\infty} \frac{|\partial_E(\Gamma_n)|}{|\Gamma_n|} = 0$. Soit $A \subset G$, on pose alors

$$m(A) =_{def} \phi((\frac{|A \cap \Gamma_n|}{|\Gamma_n|})_{n\in\mathbb{N}}) \qquad (7)$$

Alors
- $m(G) = 1$ car la suite constante à 1 converge vers 1.
- $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ car ϕ est linéaire.
- Soit $g \in \Gamma$ alors $|(|A \cap \Gamma_n| - |Ag \cap \Gamma_n|)| < 2\partial_{E_{S\cup\{g\}\cup\{g^{-1}\}}} \Gamma_n$. Comme la condition de Folner ne dépend pas du choix de l'ensemble générateur, on a que la différence entre les suites $(|\frac{A\cap\Gamma_n|}{|\Gamma_n|})_n$ et $(|\frac{Ag\cap\Gamma_n|}{|\Gamma_n|})_n$ converge vers 0. Par linéarité de ϕ, on a alors $m(A) - m(Ag) = 0$.

□

1.1.5 Définition groupe moyennable

On dira qu'un groupe Γ est moyennable s'il admet une moyenne m.

Remarque (voir [4])La réciproque de la proposition précédente est vrai mais ne sera pas démontrer ici. Néanmoins dans la suite de ce mémoire on pourra prendre la condition de Folner comme définition de moyennable.

Exemple 1 $\mathbb{Z}^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Z}^n$ est moyennable. En effet $G_k = [-k;k]^n$ convient pour la condition de Folner.

Exemple 2 F_2 Le groupe libre engendré par 2 éléments $F_2 =< a,b >$ n'est pas moyennable. En effet si on note $L(a)$ l'ensemble des mots de $< a,b >$ terminant par a, on remarque que $L(a^{-1})a$ est l'ensemble des mots ne terminant pas par a. Alors par l'absurde soit m une moyenne de F_2

$$\begin{aligned}
F_2 &= L(a) \cup L(a^{-1}) \cup L(b) \cup L(b^{-1}) \\
m(F_2) &= m(L(a)) + m(L(a^{-1})) + m(L(b)) + m(L(b^{-1})) \\
1 &= m(L(a)) + m(L(a^{-1})a) + m(L(b)) + m(L(b^{-1})b) \\
1 &= m(L(a) \cup L(a^{-1})a) + m(L(b) \cup L(b^{-1})b) \\
1 &= m(F_2) + m(F_2) \\
1 &= 2
\end{aligned}$$

□

1.2 Problème de Von Neumann

1.2.1 Proposition : sous groupe moyennable

(voir [4])
Soit Γ un groupe et H un sous groupe de Γ. Alors si H n'est pas moyennable alors Γ n'est pas moyennable.

Démonstration Par action à droite, H produit une relation d'équivalence sur Γ à savoir (Γ/H). Soit A un sous ensemble de Γ qui intersecte chaque classe d'équivalence en exactement un élément (axiome du choix). Supposons que Γ soit moyennable et soit m une moyenne. On peut alors définir une moyenne m^* sur H :

$$\forall B \subseteq H \ m^*(B) =_{def} m(AB) \tag{8}$$

Alors avec B et $C \in P(H)$ disjoints :
- $m^*(H) = m(AH) = m(\Gamma) = 1$.
- $m^*(Bh) = m(ABh) = m(AB) = m^*(B)$
- $m^*((B \cup C) = m(A(B \cup C)) = m(AB) + m(AC) = m^*(B) + m^*(C)$.

Remarque En particulier tout groupe admettant F_2 comme sous groupe n'est pas moyennable.

1.2.2 Problème de Von Neumann

Soit Γ un groupe non moyennable, a t on F_2 sous groupe de Γ ?

Il se trouve que la réponse est non, il est en effet possible de construire un contre exemple, mais ce n'est pas forcement évident.

Le but de ce mémoire est de montrer qu'une version beaucoup plus faible de ce problème, admet malgré tout une réponse positive.

1.3 Version faible

Espace étudié .
Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un ensemble fini d'éléments et soit $N \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. On étudiera l'espace mesuré suivant $(\{0,1\}^N)^\Gamma$ (soit l'ensemble des fonctions $f\ |\Gamma \to \{0,1\}^N$,soit $\{0,1\}^{N*\Gamma}$). On le munit de la tribut naturelle (ie : engendrée par les ensembles $[f(\gamma) = x : \gamma \in \Gamma, x \in \{0,1\}^N]$) et de la mesure μ_p qui est la mesure de Bernoulli de paramètre p indépendante sur $\{0,1\}^{N*\Gamma}$.

1.3.1 Définition : orbite d'équivalence engendrée par le groupe

Il y a une action de groupe naturelle de Γ sur l'ensemble $(\{0,1\}^N)^\Gamma$:

$$\forall \gamma \in \Gamma\ \forall f \in (\{0,1\}^N)^\Gamma\ \forall \lambda \in \Gamma\ (\gamma.f)(\lambda) = f(\gamma\lambda) \tag{9}$$

Cette action engendre une relation d'équivalence borélienne sur $(\{0,1\}^N)^\Gamma$: $(f,g) \in F$ ssi $\exists \gamma \in \Gamma\ \gamma.f = g$

Remarque 1 Cette action est bien sûr borélienne. On peut de plus éliminer un ensemble de mesure nulle (lorsque p est différent de 0 ou 1) de telle sorte que cette action de groupe soit libre.

Remarque 2 Cette action conserve la mesure μ_p.

Rappel : approximation ouvert-fermé Soit $(X, \mathbb{B}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de parties qui engendre la tribu $\mathbb{B}$. alors pour tout $B \in \mathbb{B}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe B' union fini d'intersection fini d'élément de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\mu(B\Delta B') < \epsilon$. (notation : $B\Delta B' = B \cup B' - B \cap B'$.)

Dans notre cas les "ouvert-fermés" sont les unions finis d'évènements de la forme $[f : (f(\gamma_1) = x_1, f(\gamma_2) = x_2, ..., f(\gamma_N) = x_N]$

Remarque 3 Cette action est mélangeante (et donc ergodique).
En effet, soit $\lambda_1, ...\lambda_k \in \Gamma$, $x_1, ..., x_k \in \{0,1\}^N$, $\nu_1, ...\nu_k \in \Gamma$, $y_1, ..., y_k \in \{0,1\}^N$ et on considère dans un premier temps les ensembles "ouvert-fermés" $A = [f : f(\lambda_1) = x_1, ..., f(\lambda) = x_k]$ et $B = [f(\nu_1) = y_1, ..., f(\nu_k) = y_k]$.
Alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel $\forall i,j \leq k\ \gamma\lambda_i \neq \nu_j$ dans ce cas $\gamma.A$ et B sont indépendants. En particulier $\mu_p(\gamma A \cap B) = \mu_p(A)\mu_p(B)$.
Dans le cas général, si maintenant A et B sont des ensembles mesurables quelconques, il existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des "ouverts-fermés" et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ tel que $\mu_p(A\Delta A'_n) \to_{n\infty} 0$, $\mu_p(B\Delta B'_n) \to_{n\infty} 0$, $\mu_p(\gamma_n A'_n \cap B'_n) = \mu_p(A'_n)\mu_p(B'_n)$. Alors $\mu_p(\gamma_n A \cap B) \to_{n\infty} \mu_p(A)\mu_p(B)$
$\square$

Remarque 4 Si F_2 est un sous groupe de Γ alors F_2 induit une action de groupe sur $(\{0,1\}^N)^\Gamma$, libre et mélangeante (donc ergodique).

Rappel Soit (X, μ) un espace mesuré muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $A \subset X$, on notera $\mathcal{R}A$ l'union de toutes les $\mathcal{R}$ orbites qui intersectent A. Alors on dit que $\mathcal{R}$ est ergodique ssi quelque soit A, $\mu(\mathcal{R}A) = 0$ ou 1.

Nous pouvons maintenant présenter le théorème qui est l'objet de ce mémoire.

1.3.2 Théorème : version faible (orbital) du problème de Von Neumann

(voir [2])

Soit Γ un groupe non moyennable. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, tel que (à un ensemble de mesure nulle près) il existe une **action borélienne, libre et ergodique** du groupe F_2 sur $(\{0,1\}^N)^\Gamma$ et dont les orbites sont contenues dans les classes d'équivalences engendrées par l'actions du groupe Γ.

Idée Il faudrait construire des sous graphes dans la relations les classes de relations d'équivalences qui soient "suffisamment branchant" pour faire ressortir une possible action du groupe F_2, tout en imposant qu'une telle relation soit ergodique.

2 Schéma de la démonstration

Montrer ce théorème peut se diviser grossièrement en deux parties. premièrement la construction d'une sous relation R' plus adaptée et étudier ses propriétés et en particulier montrer l'ergodicité, deuxièmement la construction de l'action de F_2. La première relève principalement du domaine des probabilités et plus particulièrement des percolations sur les graphes. La deuxième relève plus de l'étude des classes d'équivalences.

Nous ne pourrons malheureusement pas faire explicitement la deuxième partie. Nous nous contenterons d'énoncer et d'admettre les deux théorèmes suivants :

2.1 Coût d'une relation d'équivalence

2.1.1 Définition : Coût d'un graphe

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit R une relation d'équivalence engendrée par l'action d'un groupe dénombrable qui préserve la mesure. Soit $\mathcal{G} \subseteq R \subseteq X^2$ un graphe mesurable inclus dans les orbites de la relations d'équivalence R.

$$C_\mu(\mathcal{G}) =_{def} \frac{1}{2} \int_X deg_{\mathcal{G}}(x) d\mu(x) \tag{10}$$

Notation On appellera "R-graphage" tout graphe $\mathcal{G} \subseteq R$ tel que presque surement chaque orbite de la relations d'équivalence R ne contienne qu'une seule composante connexe de $\mathcal{G}$ (soit : la relation d'équivalence par composante connexe de $\mathcal{G}$ est égale à R.)

Exemple Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un sous ensemble fini S et qui agit librement sur un ensemble (X, μ) et dont l'action préserve la mesure. Alors le graphe $\mathcal{G}$ associé au graphe de Cayley ($\forall (x, y) \in X^2$ $(x, y) \in \mathcal{G}$ ssi $\exists s \in S$ $s.x = y$) est un graphage et

$$C_\mu(\mathcal{G}) = \frac{|S|}{2} \tag{11}$$

2.1.2 Définition : Coût d'une relation d'équivalence

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit R une relation d'équivalence engendrée par l'action d'un groupe dénombrable qui préserve la mesure. On défini ainsi le coût de R

$$C_\mu(R) =_{def} inf[C_\mu(\mathcal{G}) : \ \mathcal{G} \text{ est un } R\text{-graphage}] \tag{12}$$

Exemple Une relation d'équivalence dont toutes les orbites sont finies de cardinal N a un coût égal à $\frac{N-1}{N}$ (il suffit de $(N-1)$ arêtes pour connecter N sommets).

Culture (voir [4]) On peut montrer sans trop de difficultés que les relations d'équivalences dont toutes les orbites sont infinies sont de coût supérieur ou égale à 1. Mais montrer qu'il en existe qui admettent un coût strictement supérieur à 1 est beaucoup moins évident. Un résultat principale sur l'étude des coûts est que tout graphage qui est un arbre atteint le coût, aussi par exemple une relation d'équivalence engendrée par l'action du groupe F_2 est égale à 2 (le graphe de Cayley est un arbre).

2.1.3 Définition : "Bouts"

Soit (T, E) un arbre, soit l_1, l_2 deux chemins ($|\mathbb{N} \to G$ injectif) allant à infini. On définit la relation d'équivalence suivante $\mathcal{B}$: $l_1 \mathcal{B} l_2$ ssi les images des deux chemins coïncident sauf sur un nombre fini de sommets. On appelle "bouts" les éléments de la relation d'équivalence.
Soit (G, E) un graphe quelconque, soit l_1, l_2 ($|\mathbb{N} \to G$) deux chemins allant à infini. On définit la relation d'équivalence suivante $\mathcal{B}$: $l_1 \mathcal{B} l_2$ ssi pour tout A sous ensemble fini de G, la composante connexe infini de $l_1 - (l_1 \cap A)$ et la composante connexe infini de $l_2 - (l_2 \cap A)$ appartiennent à la même composante connexe de $G - A$. On appelle "bouts" les éléments de la relation d'équivalence.

Si une composante connexe de $G - A$ ne contient qu'un unique bout, on dira que le bout est isolé.

Remarque On vérifie que ces deux définitions coïncident pour un arbre. Si les deux chemins l_1 l_2 coïncident sauf sur un nombre fini de sommets, alors quelque soit A sous ensemble fini de G. la composante connexe infini de $l_1 - (l_1 \cap A)$ et la composante connexe infini de $l_2 - (l_2 \cap A)$ coïncident sauf sur un nombre fini de sommets, et donc appartiennent à la même composante connexe de $G - A$. Réciproquement soit l_1 , l_2 deux chemins qui ne coïncident pas sur un nombre infini de sommets, quitte à rajouter où à supprimer quelques points, on peut supposer que l_1 et l_2 ont la même racine x_0. Soit $y_1 \in l_1 - l_2 \cap l_1$ et $y_2 \in l_2 - l_2 \cap l_1$, et soit l_0 l'unique chemin (T est un arbre. reliant y_1 et y_2). toujours par unicité du chemin, tout chemin reliant un élément de l_1 qui arrive après y_1 et un élément de l_2 arrivant après y_2, contient l_0. Donc $G - l_0$ sépare les deux composantes connexe infinie de $l_1 - l_1 \cap l_0$, $l_2 - l_2 \cap l_0$.

Exemple .
$\mathbb{Z}$ contient deux bouts : $\{+\infty\}$ et $\{-\infty\}$.
$\mathbb{Z}^n$ $n > 1$ contient un seul bout. (pour tout k $\mathbb{Z}^n - B(0, k)$ est connexe).
Le graphe de Cayley du groupe libre à deux éléments (c'est un arbre) a une infinité de bouts.

2.1.4 Théorème (ADMIS) : Bouts et coût supplémentaire

(voir : [1],[2])
Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit R une relation d'équivalence qui préserve la mesure et dont tous les classes d'équivalences sont infinies dénombrables. Si il existe un R-graphage $\mathcal{G}$ tel que sur un ensemble de probabilité non nul les composantes connexes de $\mathcal{G}$ admettent au moins trois bouts. Alors $C_\mu(R) > 1$.

2.1.5 Théorème (ADMIS) : coût supplémentaire et F_2 action

(voir : [1],[2])
Soit (X, μ) un espace de probabilité. Soit R une relation d'équivalence qui préserve la mesure et dont toutes les classes d'équivalences sont infinis dénombrable et qui est ergodique. Si $C_\mu(R) > 1$ alors il existe une action mesurable du groupe F_2 libre et ergodique dont les orbites sont inclues dans les classes d'équivalences de R.

2.2 Relation d'équivalente par composante connexe

2.2.1 Proposition : Bijection avec un modèle de percolation

Soit Γ un groupe dénombrable engendré par un nombre fini d'éléments S, $S = [s_1, s_2, ..., s_N, s_1^{-1}, s_2^{-1}, ..., s_N^{-1},]$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors $((\{0,1\}^{N * \Gamma}, \mu_p)$ est canoniquement isomorphe à un modèle de percolation sur le graphe de Cayley (Γ, E_S) de loi de Bernoulli indépendante de paramètre p.

$$\begin{array}{rcl} \{0,1\}^{N*\Gamma} & \leftrightarrow & \mathcal{P}(E_S) \\ f & \leftrightarrow & \omega \\ f((i,x)) = 1 & \leftrightarrow & [x, xs_i] \in \omega \end{array}$$

Dans la suite on confondra souvent ces deux ensembles.

2.2.2 Définition : Relation d'équivalente par composante connexe

Soit $f,\ g \in \{0,1\}^{N*\Gamma}$. On défini la relation d'équivalence R de la façon suivante. $(f,g) \in R$ ssi il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma.f = g$ et que dans le graphe ω associé à f, γ soit dans la même composante connexe que o l'élément neutre du groupe.

Remarque .
- Il est évident que les orbites de R sont dans les orbites de l'action de Γ.
- Il est aussi évident que cette relation d'équivalence n'est pas ergodique. Par exemple l'ensemble des graphes ω tel que o est isolé (ie $deg_\omega(o) = 0$) est trivialement R invariant et de mesure non nulle et non co-nulle.
Nous nous intéresserons donc d'abords aux éléments dont o est dans une composante connexe infinie.

Notation On appellera U_∞ l'ensemble des ω dans $\mathcal{P}(E_S)$ tel que o soit dans une composante connexe infinie de ω.

Rappel On peut définir un ordre $<$ sur Γ. Par exemple sur S on pose $o < s_1 < s_2 < ... < s_N$. puis sur $S^{<\mathbb{N}}$ l'ordre longueur- lexicographique ($x < y$, ssi la longueur du mot x est plus petite que cette du mot y ou que les deux longueurs sont égales et que $x < y$ pour l'ordre lexicographique), et enfin sur Γ en associant à $x \in \Gamma$ le plus petit mot dans $S^{<\mathbb{N}}$ égale à x.

2.2.3 Définition : Relation d'équivalente associée aux composantes connexes infinies

Soit $f \in \{0,1\}^{N*\Gamma}$, tel que dans le graphe associé à f, o soit dans une composante connexe finie. soit γ (si il existe) le plus petit élément de Γ (par exemple pour l'ordre défini ci dessus) tel que dans le graphe associé à $\gamma.f$ o soit dans une composante connexe infinie. Soit F l'ensemble des $(f, \gamma.f)$ ainsi construits. On défini alors la relation d'équivalente associée aux composantes connexes infinies R' comme la plus petite relation d'équivalence engendré par F et $R|U_\infty$

Voici précisément ce que l'on cherchera à démontrer. pour en déduire avec l'aide des théorèmes admis précédement la version faible du problème de Von Neumann.

2.2.4 Théorème A

(voir [2])
Soit Γ un groupe non moyennable. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, tel que R' soit ergodique et tel que les composantes connexes du graphes aient au moins 3 bouts presque surement.

Plan Pour que la relation R' soit pertinente, il faut bien sur que presque surement quelque soit $f \in \{0,1\}^{N*\Gamma}$, le graphe associé ait au moins une composante connexe infinie. En fait on choisira p et N, de tel sorte qu'il y ait presque surement une infinité de composantes connexes infinies. L'existence de tel p et N est l'objet de la partie suivante. Ensuite on montrera que ces composantes connexes ont au moins trois bouts (et même une infinité). Finalement l'ergodicité découlera du point suivant "les composantes connexes infinies sont indistinguables les unes des autres". Pour démontrer cette dernière propriété. Il sera nécessaire de montrer d'abords la transcience de ces graphes.

3 Nombre de composantes connexes infinies

3.1 Introduction à la percolation sur des graphes de Cayley

Remarque 1 Γ agit sur son graphe de Cayley comme un ensemble d'automorphisme de graphes. Soit $g \in \Gamma$

$$\begin{array}{rcl} (\Gamma, E_S) & \to & (\Gamma, E_S) \\ \forall x, a \in \Gamma \; s \in S \; g.(x, (a, as)) & \to & (gx, (ga, gas)) \end{array}$$

Cette action est transitive ($\forall x, y \in \Gamma \; \exists g \in \Gamma \; gx = y$). Les graphes de Cayley (G, E) ont donc une symétrie très forte.

Remarque 2 La percolation $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ est "tolérante à l'insertion d'une arête". C'est à dire : pour tout $e \in N * \Gamma$, pour tout A un évènement tel que $\mu_p(A) > 0$ alors $\Pi_e(A) =_{def} [\omega \cup \{e\} : \omega \in A]$ est de mesure non nulle.
En effet $A = [\omega : \omega \in A, e \in \omega] \cup [\omega : \omega \in A, e \in \neg\omega]$ et par indépendance des lois de Bernoulli $\mu_p(\Pi_e([\omega : \omega \in A, e \in \neg\omega])) = \frac{p}{1-p}\mu_p([\omega : \omega \in A, e \in \omega^c])$.
On a immédiatement que la tolérance à l'insertion d'une arête implique la tolérance à l'insertion d'un chemin fini.

Nous nous intéresserons essentiellement à des évènements (borélien) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Gamma, E)$ et Γ invariant(ie $\forall g : g.\mathcal{A} = \mathcal{A}$). En principe tout évènement où on ne nomme pas explicitement un sommet ou une arête est Γ invariant. Par exemple "l'ensemble des graphes n'ayant pas de composantes connexes infinies".

Remarque Par l'ergodicité de l'action de Γ sur $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$. Les évènements invariants ont une probabilité soit 0 soit 1.

Corolaire Les évènements "il y a n composantes connexes infinies dans le graphe" (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) sont de probabilité soit 0 soit 1.

3.1.1 Théorème 0,1,∞

Dans $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$, selon la valeur de p :
soit μ_p presque sur il n'y a pas de composante connexe infinie.
soit μ_p presque sur il y a une unique composante connexe infinie.
soit μ_p presque sur il y a un infinité de composantes connexes infinies.

Démonstration Supposons que il y a un entier n supérieur ou égale à 2 tel que presque surement le nombre de composantes connexes infinies soit n. Alors il existe x et y des sommets du graphe de Cayley tel que avec une probabilité non nul x et y appartiennent à deux composantes connexes infinies différentes. Appelons C cet évènement. Soit un chemin $l = e_1, e_2, ..., e_k$ du graphe de Cayley reliant x à y. Alors par "tolérance à l'insertion d'un chemin", $\Pi_l(C) = [\omega \cup e_1, e_2..., e_n : \omega \in C)$ est de mesure non nul. Or conditionnellement à $\Pi_l(C)$ il y a au plus $n-1$ composantes connexes infinies ce qui est absurde.
□

Pour la culture On a également le théorème suivant (ADMIS) : Soit p tel que μ_p presque sur il y a une unique composante connexe infinie. alors pour tout $p' > p$, $\mu_{p'}$ presque sur il y a une unique composante connexe infinie. Aussi on peut définir $p_c \leq p_u$ tel que
$\forall p \in [0, p_c[$, μ_p presque sur il n'y a pas de composante connexe infinie.
$\forall p \in]p_c, p_u[$, μ_p presque sur il y a une infinité de composantes connexes infinies.
$\forall p \in]p_u, 1]$, μ_p presque sur il y a une unique composante connexe infinie.
Beaucoup de problèmes encore ouverts portent sur le comportement en p_u ou p_c.

Exemple $(\{0,1\}^{2*F_2}, \mu_p)$ le graphe de Cayley du groupe libre engendré par deux éléments. La percolation produit des arbres de Galton Watson avec une espérance du nombre d'enfants par génération $m = 3p$. L'existence d'arbre infini (ie La survis de l'espèce) est équivalente à $m > 1$.
conclusion :
Si $p = 1$ alors presque surement il y a une unique composante connexe infinie (trivial).
Si $1 > p > \frac{1}{3}$ il y a presque surement une infinité de composantes connexes infinies.
Si $p \leq \frac{1}{3}$ il y a presque surement aucune composante connexe infinie.

3.2 Question $p_u < p_c$?

3.2.1 Question $p_u < p_c$?

Soit Γ un groupe non moyennable engendré par un nombre fini d'éléments $S = [s_1, .., s_N, s_1^{-1}, ..., s_N^{-1}]$. Existe t-il $p_u > p_c$ tel que pour tout $p \in]p_c, p_u[\subset [0,1]$ on ait $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet presque surement une infinité de composantes connexes infinies ?

Ce problème est aujourd'hui encore ouvert, mais nous avons le théorème suivant qui s'en approche.

3.2.2 Théorème : Existence d'un choix de générateurs satisfaisant $p_u < p_c$

(voir [6]) Soit Γ un groupe non moyennable finiment engendré, il existe un ensemble de générateurs S (avec $|S| = N$) de Γ tel que pour le graphe de Cayley (Γ, E_S) il existe $p_u > p_c$ tel que $\forall p \in]p_c, p_u[\subset [0,1]$ on ait $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet presque surement une infinité de composantes infinies.

La démonstration nécessitera quelques outils techniques en particulier la notion de rayon spectrale.

3.2.3 Définition : opérateur Laplacien

Soit (Γ, E_S) un graphe de Cayley. Soit $\ell^2(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions $|\Gamma \to \mathbb{C}$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma}(f(\gamma))^2 < \infty$. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire. On peut définir l'opérateur laplacien : $L_S|\ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$.

$$\forall \gamma \in \Gamma \; L_S(f)(\gamma) =_{def} \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} f(\gamma s) - f(\gamma) \tag{13}$$

$$=_{def} P_S - I \tag{14}$$

Remarque c'est bien défini : $\sum_{\gamma\in\Gamma}(\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} f(\gamma s))^2 \leq \sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} f(\gamma s)^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)^2$.
En particulier le spectre de l'opérateur L_S est négatif.

3.2.4 Marche aléatoire sur un graphe

Soit (G, E), on note $deg_E(x) \in \mathbb{N}$ le nombre d'arêtes de (G, E) issues de x. On définit une marche aléatoire sur ce graphe comme le processus de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}([X_{n+1} = y|X_n = x]) = \frac{1}{deg_E(x)}$ si il existe $(x, y) \in E$, 0 sinon et avec une mesure initiale $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x)$.

Remarque On peut définir les mesures $\mu_n(x) =_{def} \mathbb{P}(X_n = x)$. Alors $\mu_n(x) \in L^2(G)$ et $\mu_{n+1} = P_S(\mu_n)$.

3.2.5 Définition : rayon spectrale

On appelle rayon spectrale ρ la borne supérieur du spectre de l'opérateur P_S.

3.2.6 Proposition

Soit $x, y \in G$. Alors

$$ln(\rho) \geq limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln(\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x)) \tag{15}$$

Démonstration En fait, l'égalité est vrai, on peut le voir comme une variante du Théorème de Perron-Fobenius mais nous nous contenterons de cette l'inégalité :
$\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) = \langle\delta_y, (P_S)^n(\delta_x)\rangle \leq \rho^n$.
□

3.2.7 Inégalité de Mohar

Soit (Γ, E_S) un graphe de Cayley d'un groupe non moyennable (avec $|S| = N$). Soit $i(\Gamma, E_S) = \inf_{B fini} \frac{1}{N}\frac{|\partial\hat{B}|}{|B|}$. (remarque $0 < i \leq 1$). Soit ρ le rayon spectrale. Alors

$$i(\Gamma, E_S) \leq \sqrt{1-\rho^2} \tag{16}$$

Démonstration Soit f une fonction $||f||_{L^2} = 1$ de support fini. La principale astuce consiste à introduire la valeur $\delta =_{def} \sum_{x\in\Gamma} \frac{1}{2N} \sum_{(x,y)\in E_S} |f(x)^2 - f(y)^2|$. Alors soit $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$ les éléments de l'image de f.

$$\begin{aligned}
\delta &= \sum_{x\in\Gamma} \frac{1}{2N} \sum_{(x,y)\in E_S} |f(x)^2 - f(y)^2| \\
&= \sum_{i<j} \sum_{x\in\Gamma, f(x)=a_i} \frac{1}{N} \sum_{(x,y)\in E_S, f(y)=a_j} |f(x)^2 - f(y)^2| \\
&= \sum_{i<j} \sum_{x\in\Gamma, f(x)=a_i} \frac{1}{N} \sum_{(x,y)\in E_S, f(y)=a_j} \sum_{i<k\leq j} (a_{k-1}^2 - a_k^2) \\
&= \sum_{i} \sum_{x\in\Gamma, f(x)>a_i} \frac{1}{N} \sum_{(x,y)\in E_S, f(y)=a_i} \sum_{i<k\leq j} (a_{i-1}^2 - a_i^2) \\
&\geq \sum_{i} i(\Gamma, E_S)|[x \in \Gamma : f(x) > a_i]|(a_{i-1}^2 - a_i^2) \\
&\geq i(\Gamma, E_S)||f||_{L^2}
\end{aligned}$$

On a également grâce à Cauchy Schwarz

$$\begin{array}{rcl}
\delta & = & \sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}|f(x)^2-f(y)^2| \\
\delta & = & \sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}|f(x)-f(y)||f(x)+f(y)| \\
\delta^2 & \leq & \big(\sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}(f(x)-f(y))^2\big)\big(\sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}(f(x)+f(y))^2\big) \\
\delta^2 & \leq & \big(\sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}(f(x)^2+f(y)^2)-2f(x)f(y)\big)\big(\sum_{x\in\Gamma}\frac{1}{2N}\sum_{(x,y)\in E_S}(f(x)^2+f(y)^2+2f(x)f(y)\big) \\
\delta^2 & \leq & (||f||_{L^2}-\langle f,P_Sf\rangle)(||f||_{L^2}-\langle f,P_Sf\rangle) \\
\delta^2 & \leq & (||f||^2_{L^2}-\langle f,P_Sf\rangle^2)
\end{array}$$

Conclusion

$$i(\Gamma,E_S)\leq\delta\leq\sqrt{1-\rho^2} \tag{17}$$

Remarque Ceci donne une caractérisation supplémentaire des graphes non moyennables : (Γ,E_S) est non moyennable ssi $\rho<1$. On vient de montrer $\Rightarrow$, pour $\Leftarrow$ il suffit de voir que pour Γ_n un sous ensemble fini $1-\frac{1}{\Gamma_n}\langle\mathbf{1}_{\Gamma_n},P\mathbf{1}_{\Gamma_n}\rangle=\frac{\partial\hat{\Gamma}_n}{N\Gamma_n}$.

3.2.8 Lemme : une condition pour l'existence de composantes connexes infinies

Soit (Γ,E_S) un graphe de Cayley d'un groupe non moyennable (avec $|S|=N$). Si

$$p>\frac{1}{1+Ni(\Gamma,E_S)} \tag{18}$$

Alors avec une probabilité non nulle pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma},\mu_p)$, il existe une composante connexe infinie.

Démonstration On cherche à construire une composante connexe issue de o par récurrence. On définira :
A_n un ensemble de sommets connectés à "o".
H_n un ensemble d'arêtes de E_S qui ne sont pas dans la percolation et sont à la frontière de A_n
- $A_0=\{o\}$, $H_0=\emptyset$.
- Supposons A_n et H_n construits alors si $\forall y\in\partial A_n\forall x\in A_n,(x,y)\in E_S\Rightarrow(x,y)\in H_n$, on arrête la construction l'ensemble H_n isole la composante connexe issue de o.
Sinon soit $y\in\partial A_n,x\in A_n,(x,y)\in E_S:(x,y)\in\neg H_n$. Par indépendance de la percolation de Bernoulli de paramètre p, $\mu_p([\omega:(x,y)\in\omega\mid A_n,H_n])=p$. Si $(x,y)\in\omega$ alors $A_{n+1}:=A_n\cup\{y\}$, $H_{n+1}=H_n$. sinon $A_{n+1}:=A_n$, $H_{n+1}=H_n\cup(x,y)$.
La suite $|A_n|$ est alors une somme de variables X_i iid : $P(X_i=1)=p$ et $P(X_i=0)=1-p$. L'arrêt de la construction ne peut se produire que si $|H_n|\geq i(\Gamma,E_S)N|A_n|$. Or par loi des grands nombres $\frac{1}{n}|H_n|\to(1-p)$ et $\frac{1}{n}|A_n|\to p$ aussi si $1-p<i(\Gamma,E_S)Np$ il y a avec probabilité non nul une construction qui ne s'arrête pas et donc une composante connexe infinie.
□

3.2.9 Proposition : ordre à grande distance et unicité de la composante connexe infini

(voir [6]) Soit p un paramètre tel qu'il existe presque surement une unique composante connexe infinie pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$. Alors il existe $\alpha > 0$

$$\forall x, y \in \Gamma \; \mu_p([\omega : x, y \text{ sont dans la même composante connexe de } \omega]) \geq \alpha \tag{19}$$

Démonstration Notation $B(o,R)$ est la boule centré en o de rayon R, $C(x,R,\infty)$ l'évènement $B(x,R) \cap [\text{la composante connexe infini}] \neq \emptyset]$
Puisque presque surement il existe une unique composante connexe infinie et par Γ invariance : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu_p([\omega : B(o,R) \cap [\text{la composante connexe infini}] \neq \emptyset]) > 1 - \epsilon \tag{20}$$

$$\forall x \in \Gamma \; \mu_p([\omega : B(x,R) \cap [\text{la composante connexe infini}] \neq \emptyset]) > 1 - \epsilon \tag{21}$$

$$\forall x, y \in \Gamma \; P(C(x,R,\infty) \cap C(y,R,\infty)) > 1 - 2\epsilon \tag{22}$$

On ajoute maintenant toutes les arêtes contenu dans les boules. Par tolérance à l'insertion, il existe $\lambda(R) > 0$ tel que

$$\mu_p(\Pi_{B(x,R)\cup B(y,R)}(C(x,R,\infty) \cap C(y,R,\infty)) \geq \lambda(R) P(C(x,R,\infty) \cap C(y,R,\infty)) \tag{23}$$

En remarquant que

$$\Pi_{B(x,R)\cup B(y,R)}(C(x,R,\infty) \cap C(y,R,\infty)) \subseteq [\omega : x, y \text{ sont dans la même composante connexe de } \omega])$$

Il nous suffit pour conclure de choisir $\alpha = \lambda(R)(1 - 2\epsilon)$
□

3.2.10 Lemme : condition pour l'existence d'une infinité de composantes infinies

Soit p un paramètre tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admette presque surement des composantes connexes infini et soit ρ le rayon spectral. Alors si

$$\rho N p < 1 \tag{24}$$

Alors il admet presque surement une infinité de composantes connexes infinies.

Démonstration L'idée principale de la démonstration est l'introduction du processus aléatoire branchant suivant : "une bactérie est au temps n au point a, elle meure au temps $n+1$ et sur chaque b voisins de a (dans le graphe de Cayley sans percolation) elle produit une bactérie avec probabilité p", les bactéries "filles" continuent de se multiplier de la même manières et indépendantes les unes au autres. (Il peut y avoir plusieurs bactéries sur un même sommet)".
On remarque que conditionnellement à la non extinction le nombre de Bactérie est croissant en $(pN)^n$. Appelons Q la loi de ce processus aléatoire avec en $n = 0$ il y a une seule bactérie en x.
On peut écrire un chemin reliant x à y de la forme $x = x_0, x_1, ..., x_k = y \in \Gamma \; \forall i \neq j \; x_i \neq x_j$. Observez que

$$\mu_p([\omega : \forall i < k : (x_i, x_i + 1) \in \omega]) = Q(\forall i : \text{En } x_{i+1} \text{ il y a un descendant de } x_i) \tag{25}$$

On a donc.

$$\begin{aligned}&\mu_p([\omega : x, y \text{ sont dans la même composante connexe de } \omega])\\ &\qquad \leq Q(\exists n \in \mathbb{N} : \text{ il y a une bactérie en } y \text{ au temps } n)\end{aligned}$$

On suppose maintenant par l'absurde qu'il y a une seule composante connexe infinie et donc un ordre à grande distance α. Par symétrie et indépendance des descendants ($\mathbb{P}$ est la loi de la simple marche aléatoire (ie sans branchement))

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq \mu_p([\omega : x, y \text{ sont dans la même composante connexe de } \omega])\\
&\leq Q(\exists n \in \mathbb{N} : \text{ il y a une bactérie en } y \text{ au temps } n)\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}, n\geq d_E(x,y)} Q(\text{ il y a une bactérie en } y \text{ au temps } n)\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}, n\geq d_E(x,y)} \sqrt{Q(\text{il existe une bactérie au temps } 2n \text{ en } x)}\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}, n\geq d_E(x,y)} \sqrt{\mathbb{E}(\text{nombre de bactérie au temps } 2n)\mathbb{P}(X_{2n} = x)}\\
&\leq_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}, n\geq d_E(x,y)} (\rho N p)^n\\
&\rightarrow_{d_E(x,y)\infty} 0
\end{aligned}$$

Absurde.

Démonstration de l'existence d'un choix de générateur satisfaisant $p_u < p_c$ Soit S un choix de générateur de Γ symétrique. Soit S^n l'ensemble des mots formés avec les éléments de S de longueurs n ($|S^n| = N^n$). Alors si n est paires alors $o \in S^n$ et si n est impaire alors $S \subset S^n$ et donc générateurs. Remarquez tout de même que (Γ, E_{S^n}) est un multigraphes : certains sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.
On a de plus.

$$P_{S^n} = P_S^n \tag{26}$$

En particulier $\rho_{S^n} \leq \rho_S^n \rightarrow_{n\infty} 0$, et par la remarque après l'inégalité de Mohar $i(\Gamma, S^n) \rightarrow_{n\infty} 1$. Soit $\epsilon > 0$. On pose $p_n = \frac{1+\epsilon}{1+N^n i(\Gamma, E_{S^n})}$ de tel sorte que l'existence d'une composante connexe infinie soit assurée.

$$\begin{aligned}
\rho_{S^n} p_n N^n &\leq (1+\epsilon)\frac{\rho_{S^n}}{i(\Gamma, E_{S^n})} &(27)\\
&\rightarrow_{n\ \infty} 0 &(28)
\end{aligned}$$

En particulier, il existe n tel que $\rho_{S^n} p_n N^n < 1$. Par le lemme de condition de composantes infinies, On peut donc choisir n, tel que pour tout p sur un voisinage autour de p_n, $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet une infinité de composante infini.

Ceci termine la démonstration de l'existence de paramètres p et N pour un groupe non moyennable, tel que presque surement il y a une infinité de composantes connexes infinies.

4 Propriétés des composantes connexes infinies, principe de transport de masse

On rappel que Γ agit sur son graphe de Cayley comme des automorphismes de graphes de manière transitive. On a de plus l'injectivité de l'action : $\forall x \forall y \exists ! \gamma : \gamma . x = y$. Nous verrons dans cette partie le principe de transport de masse, qui est un outils assez pratique pour démontrer des propriétés sur des graphes. Ici cet outil nous servira à montrer que les composantes connexes infinies sont transcientes et qu'elles ont une infinité de bouts.

4.1 Infinité de bouts

4.1.1 Lemme : Principe de transport de masse

(voir [3])
Soit $f|(\Gamma,\Gamma) \to \mathbb{R}$, invariant par action diagonale de Γ (ie $\forall \gamma \in \Gamma : f(\gamma x, \gamma y) = f(x,y)$). Alors

$$\forall x \sum_{y\in\Gamma} f(x,y) = \sum_{y\in\Gamma} f(y,x) \tag{29}$$

Démonstration Soit $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \sum_{y\in\Gamma} f(x,y) &= \sum_{y\in\Gamma} f(xy^{-1}x, xy^{-1}y) && (30)\\ &= \sum_{z:\exists y\in\Gamma \; z=xy^{-1}x} f(z,x) && (31)\\ &= \sum_{z\in\Gamma} f(z,x) && (32)\end{aligned}$$

□

4.1.2 Outils technique : transport de masse sur la séparation des bouts

(voir [7]) Soit (G,E) un graphe et $n \in \mathbb{N}$. Soit A_n^3 un sous ensemble fini de G de diamètre (pour la distance d_E) inférieur à n tel que $G - A_n^3$ ait au moins 3 composantes connexes. $\bigcup A_n^3$ l'union de tous les ensembles de vérifiant ces propriétés. On appelle "transport de masse sur la séparation des bouts" la fonction b_E^n définie de la manière suivante.
Soit $x \in G$, soit m le nombre de sommets y de $\bigcup A_n^3$ tel que $d_E(x,y) = d_E(x, \bigcup A_n^3)$.
On pose alors $b_E^n(x,y) = \frac{1}{m}$ si $d_E(x,y) = d_E(x,\bigcup A_n^3)$, $b_E^n(x,y) = 0$ sinon (répartition uniforme de la masse sur les plus proches éléments de $\bigcup A_n^3$).
Si $d_E(x, \bigcup A_n^3) = \infty$ (par exemple si x appartient à une composante connexe finie), on pose $b_E^n(x,x) = 1$, $b_E^n(x,y) = 0$ si $x \neq y$

Remarque On a fait en sorte que $\forall x \sum_{y\in G} b_E^n(x,y) = 1$.

Observation 1 Pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$, on peut définir $b^n(x,y)|(\Gamma,\Gamma \to \mathbb{R})$ $b^n(x,y) =_{def} \mathbb{E}(b_\omega^n(x,y))$. Dans ce cas $b^n(x,y)$ est invariant par action diagonal de Γ.

Observation 2 Si $\hat{C}$ est un bout isolé par A sous ensemble fini de G, alors pour tout x dans la composante connexe C de $G - A$ qui contient $\hat{C}$, "$d(x, A) > n \Rightarrow$ non $x \in \bigcup A_n^3$". On a donc $\hat{C} - \bigcup A_n^3$ est infini. et $\bigcup A_n^3 \cap (\hat{C} \cup \partial\hat{C})$ est fini. En particulier si $A \subset \bigcup A_n^3$ alors il existe $y \in \bigcup A_n^3 \cap (\hat{C} \cup \partial\hat{C})$ tel que $\sum_{x \in C} b_E^n(x, y) = \infty$. "Toute la masse de la composante connexe infini se transporte sur un nombre fini de sommets."

4.1.3 Proposition : Absence de bout isolé

Dans $((\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$, presque surement toute composante connexe infinie ayant au moins trois bouts n'admet pas de bout isolé et donc admet une infinité de bouts.

Démonstration On note C_E pour une composante connexe infinie dans le graphe (G, E) qui admet au moins trois bouts.

$$\begin{aligned}
X \ &=_{def} \ [\omega : \exists C_\omega \text{qui admet un nombre fini de bouts}] && (33)\\
&= \ [\omega : \exists C_\omega \exists A \subset \Gamma : \text{ fini qui isole des bouts de } C_\omega] && (34)\\
&= \ [\omega : \exists C_\omega \exists n \in \mathbb{N} : \bigcup A_n^3 \text{ fini et isole des bouts de } C_\omega] && (35)\\
&\subseteq \ [\omega : \exists n \ \exists y \in \Gamma : \sum_{x \in \Gamma} b_\omega^n(x, y) = \infty] && (36)
\end{aligned}$$

Or par principe de transport de masse, quelque soit n et quelque soit y, $\mathbb{E}[\sum_{x \in \Gamma} b_\omega^n(x, y)] = \mathbb{E}[\sum_{x \in \Gamma} b_\omega^n(y, x)] = 1$. En particulier $\mu_p(\sum_{x \in \Gamma} b_\omega^n(x, y) = \infty) = 0$. En conclusion $\mu_p([\omega : \exists C_\omega \text{qui admet un nombre fini de bout}]) = 0$.

4.1.4 Corolaire : infinité de bouts

Soit p tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet presque surement une infinité de composantes connexes infinies. Alors presque surement tous ces composantes ont une infinité de bouts.

Démonstration Par l'absurde, supposons que dans $((\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ il existe avec une probabilité non nul une composante connexe ayant au plus deux bouts. Comme presque surement il y a une infinité de composantes connexes infinies, il existe donc x, y et z dans Γ tel que avec probabilité non nul ces trois sommets soient dans des composantes connexes infinies différentes et que celle de x admette au plus deux bouts (donc isolés). Appelons $X_{x,y,z}$ cet ensemble mesurable. Soit l un chemin (fini) reliant x,y et z. Alors par tolérance à l'insertion : $\Pi_l(X_{x,y,z})$ est de probabilité non nul. mais $\forall \omega \in X_{x,y,z}$,la composante connexe contenant x dans $\omega \cup l$ admet au moins trois bouts (séparé par l) et dont au moins un bout isolé. Ceci contredit la proposition précédente.

□

4.2 Transcience

Nous cherchons maintenant à démontrer la transcience de ces graphes. L'idée est d'utiliser des outils développés sur des réseaux électriques notamment le théorème disant que les arbres admettant la propriété $p_c < p_u$, sont transcients. Pour cela il nous faudra démontrer quelques autres conditions d'existence de composantes connexes infinies dans un cas un peu plus générale que la percolation Bernoulli indépendante.

4.2.1 Outils technique : transport de masse sur les composantes connexes finies

(voir [3])
Soit (G,E) un graphe, soit $x \in G$.
Si x est dans une composante connexe infinie. On pose $f_E(x,x) = deg_E(x)$, $f_E(x,y) = 0$ si $x \neq y$.
Si x est dans une composante connexe finie de cardinal k. On pose $f_E(x,y) = \frac{deg_E(x)}{k}$ si y est dans la même composante connexe que x. $f_E(x,y) = 0$ sinon.

Remarque On a fait en sorte que $\sum_{y\in G} f_E(x,y) = deg_E(x)$.

Observation 1 Pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu)$ avec percolation Γ-invariante et $f(x,y)|(\Gamma, \Gamma \to \mathbb{R})$ $f(x,y) =_{def} \mathbb{E}(f_\omega(x,y))$ est invariant par action diagonal de Γ.

Notation on définit une notion semblable à celle qui permet de définir la condition de Folner.

$$s(G,E) = sup[\frac{|(x,y) \in E : x \in A \ y \in A|}{|A|} : A \subseteq G \text{ fini}] \tag{37}$$

Remarque : si (Γ, E_S) est un graphe de Cayley de degré N, $s(\Gamma, E_S) = N(1 - i(\Gamma, E_S))$, où $i(\Gamma, E_S) = \inf_{A fini} \frac{1}{N} \frac{|\delta \hat{A}|}{|A|}$

4.2.2 Théorème : condition suffisante pour l'existence d'une composante connexe infinie

Soit $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu)$ un graphe de Cayley avec percolation Γ-invariante(pas nécessairement une Bernoulli indépendante). Alors

$$\mathbb{E}(deg_\omega(x)) - s(\Gamma, E_S) \leq N\mu([\omega : \text{x est dans une composante connexe infini}] \tag{38}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(deg_\omega(x)) &= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(x,y)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x) 1_{x \text{ est dans une composante connexe finie}}) \\
&\quad + \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x) 1_{x \text{ est dans une composante connexe infinie}}) \\
&\leq s(\Gamma, E_S) + N\mu[\omega : \text{x est dans une composante connexe infinie}]
\end{aligned}$$

Conclusion : Si l'espérance de degré suffisamment grande, on est assuré qu'il existe avec probabilité non nulle une composante connexe infinie.

4.2.3 Outils technique : transport de masse sur les petites ramifications

(voir [3])
Soit (G,E) un graphe, soit $x \in G$. On appellera "transport de masse sur les petites ramifications" la fonction r_E définie ainsi

Si x est dans une composante connexe infinie et si x est dans une composante connexe finie de (G,E-(x,y)) On pose $r_E(x,y) = 1$ et $\forall z \neq y \; r_E(x,z) = 0$
Dans tous les autres cas on pose $r_E(x,x) = 1$ et $\forall z \neq x \; r_E(x,z) = 0$.

Remarque On a fait en sorte que $\sum_{y \in G} r_E(x,y) = 1$

Observation 1 Pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu)$ avec percolation Γ-invariante et $r(x,y)|(\Gamma, \Gamma \rightarrow \mathbb{R})$ $r(x,y) =_{def} \mathbb{E}(r_\omega(x,y)|$ x est dans une composante connexe infinie) est invariant par action diagonal de Γ

Observation 2 En examinant les deux cas : soit x est relié à la composante infinie par deux arêtes differentes, soit x est relié à la composante connexe à une seule arête, On a

$$\forall x \in G \text{ x est dans une composante connexe infinie } deg_E(x) - 1 \geq \sum_{y \in G} r_E(y,x) \tag{39}$$

4.2.4 Proposition : degré dans une composante connexe infinie

Pour $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu)$ avec percolation Γ-invariante.

$$\mathbb{E}(deg_\omega(x)| \text{ x est dans une composante connexe infini}) \geq 2 \tag{40}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\beta \quad =_{def} & \quad \mathbb{E}(deg_\omega(x)|\text{x est dans une composante connexe infinie}) \\
\geq & \quad \mathbb{E}(\sum_{y \in G} r_\omega(y,x)| \text{ x est dans une composante connexe infinie}) + 1 \\
\geq & \quad \mathbb{E}(\sum_{y \in G} r_\omega(x,y)| \text{ x est dans une composante connexe infinie }) + 1 \\
\geq & \quad 1 + 1 \\
\geq & \quad 2
\end{aligned}$$

Contre exemple dans un cas non unimodulaire (voir [7]) On pourrait être tenté de dire que la proposition précédente est naturelle et qu'il ne devrait pas être nécessaire d'imposer une Γ invariance à la loi aléatoire. Aussi nous donnons ici un contre exemple pour justifier la pertinence de cette hypothèse. L'exemple suivant est un graphe qui admet un groupe d'automorphisme de graphe H transitif mais qui ne respecte pas le principe de transport de masse.
Considérons le graphe de Cayley du groupe libre à deux éléments $F_2 < a, b >$. Imposons la loi de percolation suivante. Fixons le bout $l = (a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit H le groupe d'automorphisme de graphe qui fixe le bout. Soit $x \in F_2$, il y a un élément s de parmi $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ tel que xs s'approche du bout l et trois éléments s_1, s_2, s_3 parmi $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ tel que xs_i s'éloigne du bout l. Parmi les trois éléments qui s'en éloignent, on en choisit un avec une loi uniforme et indépendante. L'ensemble de ces éléments choisis (x, xs_i) forment le graphe aléatoire. Remarquer alors que la loi est H invariante et que par construction tous les sommets sont liés à exactement un sommet qui s'éloigne de l, mais il ne sont liés à un sommet qui s'approche de l qu'avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Conclusion tout x appartient à une composante connexe infini et $\mathbb{E}(deg(x)) = 1 + \frac{1}{3} < 2$.

4.2.5 Outils technique : tailler une forêt

([3])
Soit (G, E) un graphe. Pour chaque arête $e \in E$, on associe une lois aléatoire X_e iid, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit ζ une réalisation de cette loi. On construit alors un sous graphe aléatoire (G, E^T) de (G, E). $\forall e \in E$, ($e \in E^T$ ssi pour toute boucle $e, e_1, ...e_n$ dans E, il existe i tel que dans la réalisation ζ, $X_{e_i} > X_e$). On appellera (G, E^T) forêt taillée de (G, E).

Remarque Si (Γ, E_S) est un graphe de Cayley alors cette loi aléatoire (Γ, E_S^T) est Γ invariante.

4.2.6 Lemme : tailler une forêt

Soit (G, E), un graphe , alors presque surement.
(G, E^T) est une forêt (toutes ses composantes connexes sont des arbres).
Si (G, E) contient des composantes connexes infinies alors (G, E^T) contient des composantes connexes infinies.
Si (G, E) contient des composantes connexes infinies ayant au moins k bouts alors (G, E^T) admet des composantes connexes infinies ayant au moins k bouts

Observation Malheureusement les composantes connexes de (G, E^T) ne sont pas forcement les composantes connexes de (G, E).

Démonstration Il n'y a pas de boucle dans (G, E^T). En effet par l'absurde soit $e_1, e_2, ...e_n$ une boucle dans E^T, alors c'est une boucle dans E. Soit $k \in \{1, .., n\}$ tel $\forall i \in \{1, .., n\} X_{e_k} \geq X_{e_i}$. alors par construction non $e_k \in E^T$.
Les arbres ainsi construits qui sont issus d'une composante connexe infinie de (G, E) sont infinis. En effet par l'absurde, soit $T \subset G$ un arbre fini de (G, E^T), alors $\hat{\partial_E} T \subset E$ (non vide), isole T du reste du graphe. Soit $e \in \hat{\partial_E} T$ tel que $\forall u \in \hat{\partial_E} T$ $X_u \geq X_e$. $(e = (x_0, x_1) : x_0 \in T$, non $x_1 \in T$. Comme non $e \in E^T$ il existe $e, e_1, ..., e_n$, une boucle dans E tel que X_e est maximal. il existe alors $i \in \{1, ..n\}$ tel que $e_i = (x_i, x_{i+1}$: non $x_i \in T$, $x_{i+1} \in T$ donc dans $\hat{\partial_E} T$. Conclusion $X_e > X_{e_i}$ et $X_e < X_{e_i}$, absurde.
En fait, on a montré qu'il n'existe pas de sous ensemble fini de E^T qui sépare deux composantes connexes. On en déduit que si (G, E) contient des composantes connexes infinies ayant au moins k bouts alors (G, E^T) contient des composantes connexes infinies ayant au moins k bouts.

4.2.7 Proposition

Soit une percolation sur $\{0, 1\}^{N * \Gamma}$ Γ invariante tel que presque surement toutes les composantes connexes soit des arbres et qu'avec probabilité non nul il y ait des arbres infinis ayant au moins trois bouts. Alors

$$\mathbb{E}(deg_\omega(x) | \text{x est dans une composantes connexe infinie}) > 2 \tag{41}$$

Démonstration L'idée de la démonstration est de construire un sous graphe laissant invariant l'ensemble "est dans une composante connexe infinie" mais en moyenne, de degré inférieur.
Soit (T, E) un arbre et soit A_1^3 l'ensemble des points x tel que $(T - \{x\}, E)$ ait au moins trois composantes connexes infinies. Pour chaque sommet de A_1^3 on choisi aléatoirement de manière uniforme une arête adjacente au sommet. Soit η cet ensemble. Soit η_1 l'ensemble des éléments de η qui isolent un bout. Si il existe $x, y \in A_1^3$, tel que le chemin reliant x à y ne rencontre aucun autre sommet de A_1^3 et qu'il contient les deux arêtes de η issus de x et y. alors on choisit

aléatoirement l'une de ces deux arêtes. Soit η_2. cet ensemble. On pose alors $E' = E - (\eta_1 \cup \eta_2)$. On vérifie que toutes les composantes connexes de E' sont infinies.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(deg_\omega(x)|\text{x est dans une composantes connexe infinie}) && (42)\\ > \; & \mathbb{E}(deg_{\omega-(\eta_1\cup\eta_2)}(x)|\text{x est dans une composante connexe infinie}) && (43)\\ \geq \; & 2 && (44) \end{aligned}$$

□

4.2.8 Théorème : $p_c < p$

Soit p tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet un nombre infini de composantes connexes infinies presque surement. Alors il existe $p' < p$ tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_{p'})$ admet un nombre infini de composantes connexes presque surement.

Démonstration Soit ω un évènement de $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$, tel que ω contienne une infinité de composantes connexes infinies ayant une infinité de bouts. (par le théorème $0, 1, \infty$ et le corolaire "infinité de bouts" cet ensemble est de mesure 1). Taillons une forêt sur (Γ, ω), (Γ, ω^T). Remarquons que la loi de la variable aléatoire (Γ, ω^T) est Γ invariant et qu'il admet presque surement un nombre infini d'arbres infinis ayant une infinité de bouts.
Alors $\mathbb{E}(degre(x)) > 2$. Soit $\lambda < 1$ tel que $\lambda\mathbb{E}(degre(x)) > 2$ Alors par le théorème "condition suffisante pour l'existence de composantes connexes infinies", avec $s(T, E) = 2$ pour les arbre, après percolation de Bernoulli indépendante, de paramètre λ sur ω^T il y a avec probabilité non nul une infinité de composantes connexes infinies. Comme $\omega^T \subset \omega$, après percolation de Bernoulli indépendante, de paramètre λ, il y a avec probabilité non nul une infinité de composantes connexes infinies.
Conclusion $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_{\lambda p})$ admet une infinité de composantes connexes infinies avec probabilité non nul.

Remarque : on a en fait montré que les arbres qui apparaissent après avoir "taillé une forêt" est admettent un $\lambda < 1$ tel que la percolation de Bernoulli de paramètre λ admet des composantes connexes infinies avec une probabilité non nulle.

4.2.9 Théorème : Transcience

Soit p tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet un nombre infini de composantes connexes infinies presque surement. Alors presque surement la marche aléatoire est transciente sur toutes les composantes connexes infinies.

Démonstration voir ANNEXE pour l'étude de réseaux électrique.

5 Composantes connexes infinies indistinguables

5.1 Théorème : composantes connexes indistinguables

On a montré dans la partie précédentes que les composantes connexes infinies étaient toutes transcientes, et qu'elles admettaient toutes une infinité de bouts. Cette universalité est beaucoup plus générale. Dans cette partie nous montrerons que l'on ne peut distinguer les composantes connexes infinies les unes des autres, c'est à dire presque surement, elles ont toutes les même propriétés définissables Γ invariante.

Notation Soit $\omega \in (\{0,1\}^{N*\Gamma})$, soit $x \in \Gamma$ on notera $C_\omega(x)$ la composante connexe de ω contenant x.

5.1.1 Théorème : Composantes connexes infinis indistinguables

(voir [7]) Soit p tel que $(\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mu_p)$ admet un nombre infini de composantes connexes infinies presque surement. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous graphes de (Γ, E_S) mesurable Γ invariant. Alors presque surement "toutes les composantes connexes infinies sont dans $\mathcal{A}$ ou toutes les composantes connexes infinies sont dans non $\mathcal{A}$

La démonstration est le but de cette partie.

5.1.2 Définition : pivot

Soit $\omega \in (\{0,1\}^{N*\Gamma})$, soit $x \in \Gamma$, soit $e \in N*\Gamma$. Soit $\mathcal{A}$ sous ensemble de sous graphe de (Γ, E_S) mesurable Γ invariante. On dit que e est un $(\mathcal{A}, C_\omega(x))$-pivot si "$(C_{\omega\cup\{e\}}(x) \in \mathcal{A}$ et $(C_\omega(x)) \in \neg\mathcal{A})$ ou $(C_{\omega\cup\{e\}}(x) \in \neg\mathcal{A}$ et $(C_\omega(x)) \in \mathcal{A})$".

5.1.3 Proposition : existence de pivot

Soit $\mathcal{A}$ mesurable Γ invariant, Si [ω : il existe des composantes connexes infinis C^1_ω et C^2_ω dans ω et $C^1_\omega \in \mathcal{A}$ et $C^2_\omega \in \neg\mathcal{A}$] est de probabilité non nul, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Gamma$ tel que [ω : il existe $e \in N*\Gamma$, $(\mathcal{A}, C_\omega(x))$-pivot, $d_{N*\Gamma}(x,e) \leq n$] soit de probabilité non nulle.

Démonstration Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $X =$[ω : il existe C^1_ω,C^2_ω tel que $C^1_\omega \in \mathcal{A}$, $C^2_\omega \in \neg\mathcal{A}$ et $d_{N*\Gamma}(C^1_\omega, C^2_\omega) = k$] soit de probabilité non nul. Soit k_0 le plus petit entier vérifiant ceci. Alors il existe un chemin (dans $N*\Gamma$) $l = ((x_0,x_1) = e_1, e_2, ...e_{k_0} = (x_{k_0-1}, x_{k_0})$ tel qu'avec une probabilité non nul $X' =$[ω : , $C_\omega(x_0) \in \mathcal{A}$ et $C_\omega(x_{k_0}) \in \neg\mathcal{A}$] soit de probabilité non nul.
Remarquez que $d_{N*\Gamma}(C_{\omega\cup e_1}(x_0), C_{\omega\cup e_1}(x_{k_0})) \leq k_0 - 1$
Alors [ω :e_1 est un $(\mathcal{A}, C_\omega(x))$-pivot] ou [$\omega$:e_1 est un $(\mathcal{A}, C_\omega(x_{k_0}))$-pivot] est de probabilité non nul. En effet par tolérance à l'insertion $\Pi_{e_1}(X')$ est de probabilité non nul. Mais par minimalité de k_0, soit $C_{\omega\cup\{e_1\}}(x_0)$ et $C_{\omega\cup\{e_1\}}(x_{k_0}) \in \mathcal{A}$, soit $C_{\omega\cup\{e_1\}}(x_k))$ et $C_{\omega\cup\{e_1\}}(x_{k_0})) \in \neg\mathcal{A}$.
Conclusion, avec une probabilité non nulle il existe un pivot à une distance inférieur ou égale à k_0

5.1.4 Définition : marche aléatoire retardée

Soit (Γ, E_S) un graphe de Cayley. Soit $\omega \subseteq E_S$. On définit une marche aléatoire retardée $(W_\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sur (Γ, ω) comme une chaine de markov avec :

$$\mathbb{P}(W_\omega(n+1) = y | W_\omega(n) = x) = \frac{1}{N} \text{ si } (x,y) \in \omega \tag{45}$$

$$\mathbb{P}(W_\omega(n+1) = x | W_\omega(n) = x) = \frac{N - d_\omega(x)}{N} \tag{46}$$

$$\mathbb{P}(W_\omega(n+1) = y | W_\omega(n) = x) = 0 \text{ sinon} \tag{47}$$

Remarque 1 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $W_\omega(n)$ reste dans la même composante connexe de ω

Observation On peut redéfinir une marche aléatoire "non retardée" à partir de celle ci : Soit $\phi(n+1) =_{def} inf(k > \phi(n)$ tel que $W(k) \neq W(\phi(n))$. On pose $\hat{W(n)} =_{def} W(\phi(n))$. Alors on peut observer que cette nouvelle marche aléatoire obéit à une loi de marche aléatoire usuelle sur un graphe (saut avec probabilité uniforme sur un sommets adjacent). On peut en déduire que si le graphe est transcient pour la marche aléatoire usuelle alors elle est transcient pour la marche aléatoire retardée.

Remarque 2 Pour tout $x, y \in \Gamma$,

$$\mathbb{P}(W_\omega(n+1) = y | W_\omega(n) = x) = \mathbb{P}(W_\omega(n+1) = x | W_\omega(n) = y)$$

On en déduit que quelque soit ω (notation : $\delta_.$ est la mesure de Dirac).

$$\nu = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma \tag{48}$$

(ie : ν est la mesure uniforme) est une mesure invariante du processus de Markov W_ω

Notation On notera : $(\{0,1\}^{N*\Gamma} \times \Gamma^{\mathbb{Z}}, \hat{\mathbb{P}}_p^x)$, l'espace de probabilité tel que la percolation sur $(\{0,1\}^{N*\Gamma})$ suit la loi de Bernoulli indépendante de paramètre p et que $(W_\omega(n)|\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une marche aléatoire retardée avec $W_\omega(0) = x$ presque surement.
Γ agit naturellement sur $(\{0,1\}^{N*\Gamma}) \times \Gamma^{\mathbb{Z}}$: $\gamma.(\omega, (W(n)_{n\in\mathbb{Z}})) = (\gamma\omega, (\gamma.W(n))_{n\in\mathbb{Z}})$.
On notera S l'action de décalage $S.(\omega, (W(n)_{n\in\mathbb{Z}}) =_{def} (\omega, (W(n+1)_{n\in\mathbb{Z}})$

5.1.5 Proposition : Stabilité de la marche aléatoire retardée

Soit $\mathcal{A} \subseteq (\{0,1\}^{N*\Gamma}) \times \Gamma^{\mathbb{Z}}$ Γ invariante. Alors

$$\hat{\mathbb{P}}_p^x(S.\mathcal{A}) = \hat{\mathbb{P}}_p^x(\mathcal{A}) \tag{49}$$

Démonstration On cherche à utiliser le fait que ν est la mesure uniforme du processus de Markov, elle est de plus Γ invariante. On pose

$$\hat{\mathbb{P}}_p^\nu =_{def} \sum_{x\in\gamma} \hat{\mathbb{P}}_p^x \tag{50}$$

Soit $\omega \in \{0,1\}^{N*\Gamma}$. Soit $x_{-n}, x_{-n+1}, ..., x_n \in \Gamma$. . Avec notation $g(y,x) =_{def} \mathbb{P}(W_\omega(n+1) = y|W_\omega(n) = x)$, on a

$$\hat{\mathbb{P}}_p^\nu(W_\omega : (W_\omega(-n) = x_{-n}), (W_\omega(-n+1) = x_{-n+1})), ..., W_\omega(n) = x_n|\omega) = \prod_{-n\leq i<n} g_\omega(x_i, x_{i+1}) \tag{51}$$

En particulier cela ne dépend pas de l'indexation de W_ω. On en déduit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_p^\nu(W_\omega : (W_\omega(-n) = x_{-n}), (W_\omega(-n+1)x_{-n+1})), ..., W_\omega(n) = x_n|\omega) \\ = \ & \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(W_\omega : (W_\omega(-n-1) = x_{-n}), (W_\omega(-n) = x_{-n+1})), ..., W_\omega(n-1) = x_n|\omega) \end{aligned}$$

et donc par un argument de classe monotone, quelque soit $\beta \subset \Gamma^{\mathbb{Z}}$ mesurable. $\hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\beta|\omega) = \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(S.\beta|\omega)$. Conclusion quelque soit $\mathcal{A}$.

$$\hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\mathcal{A}) = \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(S.\mathcal{A}) \tag{52}$$

Soit $x, y \in \Gamma$, et soit $\mathcal{A} \subseteq \{0,1\}^{N*\Gamma}) \times \Gamma^{\mathbb{Z}}$ mesurable Γ invariant. Alors

$$\begin{aligned} f(x,y) \ &=_{def} \ \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\mathcal{A}, W(0) = x, W(-1) = y) && (53) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\mathbb{P}}_p^\gamma(\gamma.\mathcal{A}, W(0) = x, W(-1) = y) && (54) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\mathbb{P}}_p^o(\mathcal{A}, W(0) = \gamma^{-1}x, W(-1) = \gamma^{-1}y) && (55) \end{aligned}$$

est Γ invariant (pour l'action diagonal) Par le principe de transport de masse

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_p^x(\mathcal{A}) &= \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\mathcal{A}, W(0) = x) \\ &= \sum_{y\in\Gamma} \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\mathcal{A}, W(0) = x, W(-1) = y) \\ &= \sum_{y\in\Gamma} f(x,y) \\ &= \sum_{y\in\Gamma} f(y,x) \\ &= \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(\mathcal{A}, W(-1) = x) \\ &= \hat{\mathbb{P}}_p^\nu(S.\mathcal{A}, W(0) = x) \\ &= \hat{\mathbb{P}}_p^x(\mathcal{S}.\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Démonstration du théorème Composantes connexes infinies indistinguables .
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous graphes Γ invariant. On suppose par l'absurde que le théorème est faux et donc qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ $\mu_p([\omega$: il existe $e \in N * \Gamma$, $(\mathcal{A}, C_\omega(o)$-pivot, $d_{N*\Gamma}(o,e) \le r]) = \alpha > 0$. On note $\mathcal{A}_o$ l'évènement $C_\omega(o) \in \mathcal{A}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe R et $\mathcal{A}'_o$ un évènement qui ne dépende que des arêtes situées par rapport à o à une distance inférieur ou égale à R tel que $\mu_p(\mathcal{A}_o \Delta \mathcal{A}'_o) < \epsilon$. L'idée est de montrer qu'il existe $\alpha' > 0$ tel que pour tout R, $X_R =_{def} [\omega : \mathcal{A}_o$, il existe un $(\mathcal{A}, C_\omega(o))$-pivot à une distance $> R$ de $o]$, on ait $\mu_p(X_R) \ge \alpha'$. En effet dans ce cas, notons e_x le premier (par exemple pour l'ordre lexicographique dans Γ) $(\mathcal{A}, C_\omega(o))$-pivot se trouvant à une distance supérieur à R de o. En effet si c'était le cas, par tolérance à l'insertion sur une percolation de Bernoulli indépendant de paramètre p $\mu_p(\Pi_{e_x}(X_R)) \ge min(\frac{p}{1-p}, 1)\frac{\alpha'}{2}$.
Or $\Pi_{e_x}(X_R) \subset \neg\mathcal{A}_0$ et $\mu_p(\Pi_{e_x}(X_R) \cap \neg\mathcal{A}'_o) = \mu_p(\Pi_{e_x}(X_R \cap \neg\mathcal{A}'_o)) < max(\frac{p}{1-p}, 1)\epsilon$. Ce qui est une contradiction lorsque ϵ tend vers 0.

Montrons l'existence de ce α', pour cela on utilisera la marche aléatoire retardée. Il serait naturel de poser

$$\mathcal{B} =_{def} [\omega : (\omega, C(W(0))) \in \mathcal{A}, \text{il existe un } (\mathcal{A}, C_\omega(W(0)))\text{-pivot à une distance} \le r \text{ de } W(0)]) \tag{56}$$

Alors $\mathcal{B}$ est Γ invariant. et

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}_p^o(\mathcal{B}) &= \mu_p([\omega : \text{ il existe } e \in N * \Gamma,\ (\mathcal{A}, C_\omega(o))\text{-pivot},\ d_{N*\Gamma}(o,e) \leq r]) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

Donc d'après la proposition précédente Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\alpha &= \hat{\mathbb{P}}_p^o(\mathcal{B}) \\ &= \hat{\mathbb{P}}_p^o(S^k\mathcal{B}) \\ &= \hat{\mathbb{P}}_p^o([\omega : (C_\omega(W(k))) \in \mathcal{A}, \text{il existe un } (\mathcal{A}, C(W(k)))\text{-pivot} \\ &\quad \text{à une distance} \leq r \text{ de } W(k)])\end{aligned}$$

On utilise finalement le fait que W est une marche aléatoire transciente,. Lorsque k tend vers l'infini, la probabilité pour que $d_{E_S}(W(k), o) < R + r$ tend vers 0. Conclusion

$$\begin{aligned}&\mu_p([\omega : \mathcal{A}_o \text{ il existe un } (\mathcal{A}, C_\omega(o))\text{-pivot à une distance} > R \text{ de } o]) \\ \geq\ &\hat{\mathbb{P}}_p^o([\omega : (\omega, C_\omega(W(k))) \in \mathcal{A}, \text{il existe un } (\mathcal{A}, C_\omega(W(k)))\text{-pivot} \\ &\quad \text{à une distance} \leq r \text{ de } W(k), d(o, W(k)) > R + r]) \\ \rightarrow_{k\infty}\ &\alpha\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de l'indistinguabilité des composantes connexes infinies.

5.1.6 proposition : petite généralisation

Il est possible de remplacer dans le théorème $\mathcal{A}$ ensemble Γ invariant de sous graphes par $\mathcal{A}$ sous ensembles Γ invariant de $[(\omega, C) \in (\{0,1\}^{N*\Gamma})^2$ tel que C est un sous graphe de $\omega]$.

Démonstration On vérifie que cela ne change pas la démonstration précédente.

5.2 Ergodicité de la relation d'équivalence

Nous terminons ici par montrer enfin l'ergodicité de la relation d'équivalence associée aux composantes connexes infinies R'. On rappel que $(f, g) \in R$ ssi il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma.f = g$ et que dans le graphe ω associé à f, γ soit dans la même composante connexe que o l'élément neutre du groupe. et que F est un ensemble mesurable qui lie chaque élément qui appartient pas à une composante connexe infinie à un élément qui appartient à un composante connexe infinie.

Observation R' est ergodique si et seulement si $R|U_\infty$ est ergodique sur U_∞.
En effet "$\Rightarrow$" est évident car $R'|U_\infty = R|U_\infty$.
"$\Leftarrow$" Soit A un ensemble de mesure non nul, Alors $FA \cap U_\infty$ est de mesure non nulle. Donc comme $R|U_\infty$ est ergodique. $\mu_p(RFA) = \mu_p(U_\infty)$. Comme tout élément de X est presque surement lié à un élément de U_∞ $\mu_p(FRFA) = 1$ donc $\mu_p(R'A) = 1$.

5.2.1 Proposition : R' est ergodique

(voir [2])
R' est ergodique

Démonstration D'après l'observation précédente, montrons que $R|U_\infty$ est ergodique.

Soit $\phi|(\{0,1\}^{N*\Gamma},\Gamma) \to \{0,1\}^{N*\Gamma}$, $\phi(f,\gamma) = \gamma^{-1}f$. C'est une application invariante par action diagonal de Γ. Elle s'étend naturellement $\phi|\{0,1\}^{N*\Gamma}, \mathcal{P}(\Gamma) \to \mathcal{P}(\{0,1\}^{N*\Gamma})$. On pose l'ensemble Γ invariant $\mathbf{C} =_{def} [(\omega, C)$:C est une composante connexe infinie de $\omega]$. Alors ϕ envoie chaque élément de $\mathbf{C}$ sur une orbite de $R|U_\infty$.

Soit $\mathcal{U}$ un sous ensemble de U_∞ R invariant. Alors $\phi^{-1}(\mathcal{U})$ est un ensemble Γ invariant de $\mathbf{C}$. D'après le théorème des composantes connexes infinies indistinguables, presque surement pour tous ω, soit toutes les composantes connexes infinies C de ω, $(\omega, C) \in \phi^{-1}(\mathcal{U})$, soit toutes les composantes connexes infinies C de ω, $(\omega, C) \in \neg\phi^{-1}(\mathcal{U})$. Par projection sur la première variable, $\phi^{-1}(\mathcal{U})$ et $\neg\phi^{-1}(\mathcal{U})$ définissent donc deux ensembles Γ invariant de $\{0,1\}^{N*\Gamma}$.

Par ergodicité de l'action de Γ, la projection de $\phi^{-1}(\mathcal{U})$ est donc de mesure nulle ou co-nulle. On en déduit que $R|U_\infty$ est ergodique. et donc que R' est ergodique.

$\square$

Ceci complète la démonstration du "théorème A", la relation d'équivalence R' est bien ergodique et chaque composante admet au moins trois bouts.

6 ANNEXE : Réseau électrique

Rappel : Marche aléatoire sur un graphe Soit (G, E),. On définit une marche aléatoire sur ce graphe comme le processus de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}([X_{n+1} = y | X_n = x]) = \frac{1}{deg_E(x)}$ si il existe $(x, y) \in E$, 0 sinon et avec une mesure initiale $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x)$. On notera $\mathbb{P}^{\mu}$ ce la loi de ce processus.

Rappel : temps d'arrêt Soit $A \subset G$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le graphe. On peut définir un temps d'arrêt T_A "premier temps d'atteinte".

$$T_A((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) =_{def} inf[t : X_t \in A] \tag{57}$$

6.0.2 Définition : gradient et divergence

Soit (G, E) un graphe. Soit $f|G \to \mathbb{R}$ et soit $\psi|E \to \mathbb{R}$.
On appelle gradient de f.

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ grad(f)(x,y) & =_{def} & f(y) - f(x). \end{array}$$

On appelle divergence de ψ.

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{R} \\ div(\psi)(x) & =_{def} & \frac{1}{deg(x)} \sum_{y:(x,y)\in E} \psi(x,y) \end{array}$$

On appelle laplacien de f.

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{R} \\ \Delta(f)(x) & =_{def} & div(grad(f)) = \frac{1}{deg(x)} \sum_{(x,y)\in E} f(y) - f(x) \end{array}$$

6.0.3 Proposition : premier temps d'atteinte

Soit $A, B \subset G$ deux sous ensembles disjoints. Soit T_A et T_B les deux temps d'arrêt de premier temps d'atteinte. Alors $f(x) =_{def} \mathbb{P}^{\delta_x}(T_A > T_B)$

$$\forall x \in G - (A \cup B)\ \Delta(f)(x) = 0 \tag{58}$$

$\forall x \in A : f(x) = 0$ et $\forall x \in B : f(x) = 1$

Démonstration Par propriété de Markov :

$$\mathbb{P}^{\delta_x}(T_A > T_B) = \sum_{y\in G} \mathbb{P}^{\delta_x}(X_1 = y)\mathbb{P}^{\delta_y}(T_A > T_B) \tag{59}$$

$$= \sum_{y:(x,y)\in E} \frac{1}{deg(x)} \mathbb{P}^{\delta_y}(T_A > T_B) \tag{60}$$

6.0.4 Définition ; espace de Hilbert des réseaux

On définit deux produits scalaires respectivement sur G et E. Soit $f_1, f_2|G \to \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2|E \to \mathbb{R}$

$$\langle f_1, f_2 \rangle_G =_{def} \sum_{x \in G} \frac{1}{deg(x)} f_1(x) f_2(x) \tag{61}$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_E =_{def} \sum_{(x,y) \in E} \psi_1(x,y) \psi_2(x,y) \tag{62}$$

On note $L^2(G)$ et $L^2(E)$ les espaces de Hilbert associés à ces produits scalaires.

Remarque Dans ces espaces, div et $grad$ sont duals.

Définition On définit deux sous espace de $L^2(E)$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$.
Soit $l = (e_1, e_2 ... e_k)$ une boucle dans E alors on lui associe un élément de $L^2(E)$ $\psi_l(e) = 1$ si $e \in l$, 0 sinon. On définit $\mathcal{C}$ comme le sous espace linéaire engendré par les boucles.
On définit $\mathcal{G}$ comme l'ensemble des fonctions ψ égale au gradient d'une fonction $f|G \to \mathbb{R}$

6.0.5 Proposition : division de l'espace de Hilbert

$$L^2(E) = \mathcal{C} + \mathcal{G} \tag{63}$$

démonstration Ces deux ensembles sont orthogonal. En effet soit l un cycle. alors quelque soit $f|G \to \mathbb{R}$, $\langle \psi_l, grad(f) \rangle = 0$. Ils sont complémentaires. En effet soit $\psi|E \to \mathbb{R}$ tel que quelque soit la boucle l, $\langle \psi_l, \psi \rangle = 0$. Soit x_0 un sommet du graphe, pour tout sommet du graphe y tel qu'il existe un chemin l reliant x_0 à y on pose $f(y) =_{def} \sum_{e \in l} \psi(e)$. Alors comme ψ s'annule sur les cycles la définition de f ne dépend pas du chemin choisit et on a $grad(f) = \psi$.

Remarque Pour tout $\psi \in \mathcal{C}$ on a $div(\psi) = 0$

6.0.6 Corolaire : principe de Thompson

Soit $\pi_{\mathcal{G}}$ la projection orthogonale sur le sous espace $\mathcal{G}$. Alors quelque soit $\psi \in L^2(E)$, $\pi_{\mathcal{G}}(\psi)$ est l'élément ξ de $L^2(E)$ de norme minimal tel que $div(\xi) = div(\psi)$

6.0.7 Théorème maximal

Soit $A \subset G$ fini connexe et non isolé, soit $f|G \to \mathbb{R}$ vérifiant $\Delta(f)|_A = 0$. Alors $max[f(x) : x \in A] \leq max[f(x) : x \in \partial A]$.

Démonstration

$$\text{"}\Delta(f)(x) = 0 \text{ et } \forall y : (x,y) \in E \ f(x) \geq f(y)\text{"} \Rightarrow \forall y : (x,y) \in E \ f(x) = f(y) \tag{64}$$

Donc si le maximum m de $f|_{A \cup \partial A}$ est atteint en un point a de A alors $[x : f(x) = m]$ contient la composante connexe de a et donc $A \cup \partial A$.

6.0.8 Corolaire : unicité du problème de Dirichlet

Soit $A \subset G$ fini connexe et non isolé, soit $h|\partial A \to \mathbb{R}$, $f, g|A \cup \partial A \to \mathbb{R}$ tel que $\Delta(f)|_A = \Delta(g)|_A = 0$ et $f|_{\partial A} = g|_{\partial A} = h$. Alors f = g.

Démonstration $\Delta(f-g)|_A = 0$ et $max[(f-g)(x) : x \in \partial A] = 0$. Donc $f - g \leq 0$, donc par symétrie $f = g$.

Remarque :condition pour la transience Soit (G, E) un graphe connexe. soit $x_0 \in G$ alors la marche aléatoire sur ce graphe est récurente ssi quelque soit $y \in G$.

$$\mathbb{P}^{\delta_y}(T_{\partial B(x_0,R)} > T_{x_0}) \to_{R\infty} 1 \tag{65}$$

ssi

$$\Delta(\mathbb{P}^{\delta_y}(T_{\partial B(x_0,R)} > T_{x_0}))(x_0) \to_{R\infty} 0 \tag{66}$$

6.0.9 Condition pour la transience

Soit (G, E) un graphe connexe infini. Ssi il existe $\psi \in L^2(E)$ tel que $div(\psi) = \delta_{x_0}$. Alors la marche aléatoire est transiente.

Démonstration "$\Leftarrow$" : Si la marche aléatoire est transiente, alors avec $f(y) =_{def} \mathbb{P}^{\delta_y}(T_{x_0} < \infty)$

$$\Delta(f)(x_0) = 0 \text{ et si } y \neq x_0 \ \Delta(f)(y) = 0 \tag{67}$$

$$\langle grad(f), grad(f) \rangle_E = \langle f, \Delta(f) \rangle_G = \Delta(f)(x_0) \tag{68}$$

Pour conclure il suffit alors de poser $\psi = \frac{1}{\Delta(f)(x_0)} grad(f)$

"$\Rightarrow$" : Soit $\psi \in L^2(E)$ tel que $div(\psi) = \delta_{x_0}$. Alors soit $f|G \to \mathbb{R}$ tel que $grad(f) = \pi_{\mathcal{G}}(\psi)$. Remarquez que $\Delta(f) = div(\pi_{\mathcal{G}}(\psi)) = div(\psi) = \delta_{x_0}$
Et soit λ tel que $\lambda f(x_0) = 1$. Alors par unicité de la solution au problème de Dirichlet

$$\mathbb{P}^{\delta_y}(T_{\partial B(x_0,R)} > T_{x_0}) \to_{R\infty} \lambda f \tag{69}$$

D'où la transience.

6.0.10 Corolaire : monotonie

Soit $(H, F) \subset (G, E)$ un sous graphe. Si (H, F) est transient alors (G, E) est transient.

Démonstration Il existe $\psi \in L^2(F) \subseteq L^2(G)$ tel que $div(\psi) = \delta_{x_0}$.

6.0.11 Définition : flots (flow)

Soit (G, E) un graphe fini, soit $x_0, x_\infty \in G$. Soit $c|E \to \mathbb{R}_+$. On appelle "flots" les fonctions $f|E \to \mathbb{R}$ tel que $div(f)|_{G-\{x_0,x_\infty\}} = 0$ et $|f| \leq c$
On appelle coupure $C \subseteq E$ tel que C sépare x_0 et x_∞. On définit le poids de la coupure

$$w(C) = \sum_{e \in C} c(e) \tag{70}$$

On définit la valeur du flot f.

$$val(f)_{x_0} = \sum_{(x_0,y) \in E} f(x_0, y) \tag{71}$$

6.0.12 Max flow min cut Théorème

Soit (G, E) un graphe fini, soit $x_0, x_\infty \in G$. Soit $c|E \to \mathbb{R}_+$. Alors

$$max[val(f)(x_0) : f \text{ est un flot}] = min[w(C) : C \text{ est une coupure}] \tag{72}$$

Démonstration "$\leq$" Soit C une coupure et soit A la composante connexe de $(G, E - C)$

$$\begin{aligned} val(f)(x_0) &= \sum_{x \in A} val_x(f) && (73) \\ &= \sum_{e \in C} f(e) && (74) \\ &\leq \sum_{e \in C} c(e) && (75) \end{aligned}$$

"$\geq$" Soit f un flots de valeur maximal alors on pose $c_f = c - f$. Si il existe un chemin l reliant x_0 à x_∞tel que pour tout $e \in l$ $c_f(e) > 0$. Alors $f + 1_l min[c_f(e) : e \in l]$ est un flot qui contredit la maximalité de f. Donc il existe C une coupure tel que pour tout $e \in C$ $f(e) = c(e)$

6.0.13 Proposition : Transience pour les arbres ayant $p_c < 1$

Soit (T, E) un arbre de racine x_0 tel qu'avec probabilité non nul il existe un composante connexe infinie contenant x_0 la percolation de Bernoulli indépendante de paramètre $p < 1$. Alors cet arbre est transient.

Démonstration On pose $c|E \to \mathbb{R}_+$:

$$c(e) = p^{-d_E(x_0, e)} \tag{76}$$

Soit C une coupure qui isole x_0 de l'infini, remarquez que

$$\begin{aligned} w(C) &= \sum_{(x,y) \in C} p^{-d_E(x_0, (x,y))} && (77) \\ &= \sum_{(x,y) \in C} \mu_p(y \text{ est dans la composante connexe de } x_0) && (78) \\ &\geq \mu_p(\text{ il existe } y \text{ et } x \text{ dans la composante connexe de } x_0 \text{ tel que } (x,y) \in C) && (79) \\ &\geq \mu_p(\text{la composante connexe de } x_0 \text{ est infini}) && (80) \end{aligned}$$

Par le max flow min cut théorème, il existe ψ tel que pour e $\psi(e) \leq p^{d_E(e, x_0}$ et $div(\psi)(x_0) \neq 0$.Enfin

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \psi(e)^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{e \in E : d_E(e, x_0) = n} \psi(e)^2 && (81) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{-n} \sum_{e \in E : d_E(e, x_0) = n} \psi(e) && (82) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{-n} && (83) \\ &< \infty && (84) \end{aligned}$$

Références

[1] D. Gaboriau. Cout des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math*, 2000.

[2] Damien Gaboriau and Russel Lyons. A mesurable groupe théoric solution to von neumann's problem. *Springer-Verlag*, 2009.

[3] Y. Peres O Schramm I. Benjamini, R. Lyons. groupe invariante percolation on graphe. *Birkhauser-Verlag*, 1999.

[4] A.S. Kechris and B.D. Miller. *Topics in orbite equivalence*. Springer-Berlin, 2004.

[5] Russels Lyons and Yuval Peres. *probability on tree and network*. online, 2010.

[6] Smirnova-Nagnibeda T Pak, I. On non-uniqueness of percolation on nonamenable cayley graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2000.

[7] O. Schramm R. Lyons. Indistinguishability of percolation clusters. *Ann Prob*, 1999.